

24

## ESTUDIO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA EVOLUCIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN ANTENAS-CÓNICAS ACOPLADAS A GUÍAS DE ONDAS CIRCULARES PARA APLICACIONES EN RADIOASTRONOMÍA\*

Por: Francisco Racedo Niebles\*\* y Sonia Valbuena Duarte\*\*\*

Fecha de recibido: 4 de julio de 2010 • Fecha de aceptación: 30 de septiembre de 2010

### RESUMEN:

Uno de los problemas de mayor interés en aplicaciones de dispositivos electrónicos y eléctricos en astronomía y radioastronomía es el estudio teórico y práctico que involucra la evolución temporal de los campos electromagnéticos en estructuras tipo antenas. En este sentido se estudió de forma numérica el comportamiento y evolución temporal de los campos electromagnéticos en una antena acoplada a un oscilador trabajando en un régimen de frecuencias en torno de los gigahertz. Se realizó una simulación 2-dimensional lográndose un estudio rápido y preciso de la evolución de los campos eléctricos y magnéticos en función del tiempo. También se muestra una discusión completa de los fundamentos teóricos del método numérico seleccionado, sus bondades para solucionar el tipo de problema objeto de estudio y la forma de cómo introducir las condiciones de frontera para así acotar el dominio solución del problema.

### PALABRAS CLAVE:

Diferencias finitas, Simulación, Guía de onda, Antena, Campos electromagnéticos, Matlab.

Revista Inge-CUC / Vol. 6 - No. 6 / Octubre 2010 / Barranquilla - Colombia / ISSN 0122-6517

301



\* Investigación Estudio y Simulación Numérica de la Evolución de Ondas Electromagnéticas en Antenas para Aplicaciones en Radioastronomía. Grupo MATINCUC, Línea de Métodos Numéricos aplicados.

\*\* Investigador Grupo MATINCUC, Departamento de Ciencias Básicas, CUC. fracedo1@cuc.edu.co

\*\*\* Directora Grupo MATINCUC, Departamento de Ciencias Básicas, CUC. svalbuen1@cuc.edu.co



## STUDY AND NUMERICAL SIMULATION OF THE EVOLUTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN CONICAL ANTENNAS COUPLED TO CIRCULAR WAVEGUIDE

By: Francisco Racedo Niebles y Sonia Valbuena Duarte

### ABSTRACT:

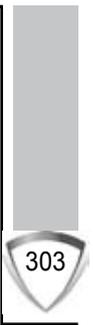
One of the problems of greatest interest in applications of electronic and electrical devices in astronomy and radio astronomy is the theoretical and practical study that involves the temporal evolution of electromagnetic fields in antenna structures. In this sense was studied numerically the behavior and temporal evolution of electromagnetic fields of an antenna coupled to an oscillator working in the frequency regimen around the gigahertz. The simulation will be perfor-

med in two dimensions what in principle allows a fast and accurate study of electric and magnetic fields as a function of time. The study will show a full discussion of the theoretical bases of the numerical method chosen, its benefits to solve this type of problem under study and how to introduce the boundary conditions in order to narrow the solution of the problem domain.

### KEY WORDS:

Finite differences, Simulation, Wave guide, Antenna, Electromagnetics field, Matlab.





## INTRODUCCIÓN

El estudio, proyección y diseño de antenas de geometría cónica acopladas a guías de ondas circulares continua manteniendo el interés científico debido a su aplicación en sistemas de telefonía celular y en aplicaciones en radioastronomía, debido a que facilitan la capacidad de transmisión de la información y si se ajusta la frecuencia de trabajo en el rango de los 20 a 80 gigahertz el potencial de aplicación en sistemas astronómicos y radioastronómicos es enorme. Con el objeto de optimizar tiempo, dinero, etc. se recomienda fuertemente realizar simulaciones de los sistemas o dispositivos a implementar. En el caso de esta investigación el objeto principal consiste en simular 2-dimensionalmente el patrón de radiación de una antena cónica acoplada a un guía de onda circular operando en una frecuencia de 50 gigahertz con el fin de tener antenas con bajos márgenes de error y de rápida implementación física. Desde hace 5 décadas se han llevado a cabo algunos desarrollos para hallar patrones de radiación de antenas utilizando métodos numéricos como FDM (Método de Diferencias Finitas), FEM (Método de Elementos Finitos), TLM (Matriz de Línea de Transmisión) y MoM (Método de Momentos) y el FDTD (Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo).

De los métodos numéricos arriba mencionados se escogió el FDTD. Este método, a diferencia de los otros, permite observar la evolución temporal de las ecuaciones de Maxwell. En el proceso de la simulación se incluyeron capas perfectamente acopladas, conocidas como PML (Perfect Mached Layer) como condiciones de fronteras absorbentes con el fin de evitar reflexiones espurias en los bordes.

## MARCO TEÓRICO

### Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo - FDTD

El método de diferencias finitas es una aproximación numérica que permite encontrar la solución aproximada de las ecuaciones que gobiernan el

modelo matemático de un sistema físico real. Una variante a este método fue introducida por Yee al final de la década de los 60 y que hoy se conoce como el método FDTD. Este se basa en la utilización de diferencias centrales de segundo orden en las ecuaciones de Maxwell que como se sabe incluyen derivadas espacio temporales de los campos electromagnéticos.

Las ecuaciones de Maxwell en términos del rotacional de interés en este estudio son:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \times H - \frac{\sigma}{\epsilon} E \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \nabla \times E - \frac{\rho}{\mu} H$$

Donde  $E$  y  $H$  son cantidades vectoriales 3-dimensionales.

Si el medio es el espacio libre y utilizando la aproximación de diferencias finitas centrales se tiene lo siguiente:

$$\frac{E_x^{n+1/2}(k) - E_x^{n-1/2}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)}{\Delta x} \quad (2)$$

$$\frac{H_y^{n+1}(k+1/2) - H_y^n(k+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{E_x^{n+1/2}(k) - E_x^{n+1/2}(k)}{\Delta x} \quad (3)$$

En estas ecuaciones, la variable temporal se encuentra inmersa en el índice  $n$ , que se encuentra relacionado con  $t$  por medio de:  $t = \Delta t \cdot n$ , y en  $k$  se encuentra la parte temporal que se relaciona por medio de:  $z = \Delta x \cdot k$ . Las ecuaciones arriba se pueden reordenar como:

$$\frac{E_x^{n+1/2}(k) - E_x^{n-1/2}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)}{\Delta x} \quad (5)$$

$$\frac{H_y^{n+1}(k+1/2) - H_y^n(k+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{E_x^{n+1/2}(k) - E_x^{n+1/2}(k)}{\Delta x} \quad (6)$$



Debe notarse por ejemplo que el nuevo valor de E, en la ecuación (5), es obtenido de valores previos de E y de H. Esta es la esencia del MDF en el dominio del tiempo como se muestra en la figura 1.

Figura 1. Modelo de molécula en la aproximación de diferencias centrales



Si normalizamos las expresiones (5) y (6) por medio de la sustitución de  $\tilde{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E$ , o en otras palabras introduciendo unidades gaussianas, obtenemos:

$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_x^{n-1/2}(k) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} [H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)] \quad (7)$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k)] \quad (8)$$

De la expresión arriba, si se escoge el tamaño del paso  $\Delta x$ , entonces el tamaño del paso  $\Delta t$  queda determinado por:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2 \cdot c_0} \quad (9)$$

Las expresiones (7) y (8) son fácilmente escritas en algún lenguaje de programación tales como C++, Fortran o Matlab.

Si se considera el medio con características isotrópicas en la región bajo estudio y temporalmente invariantes en la misma región, entonces las ecuaciones en (1) se pueden expresar en forma cartesiana, para el modo transversal electric, que es el modo que se propaga el guía de onda considerado, como:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma E_x \right)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \rho H_z \right)$$

Introduciendo la notación clásica de Yee para una red cartesiana espacio temporal:

$$F(x, y, z, t) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = F^n(i, j, k) \quad (11)$$

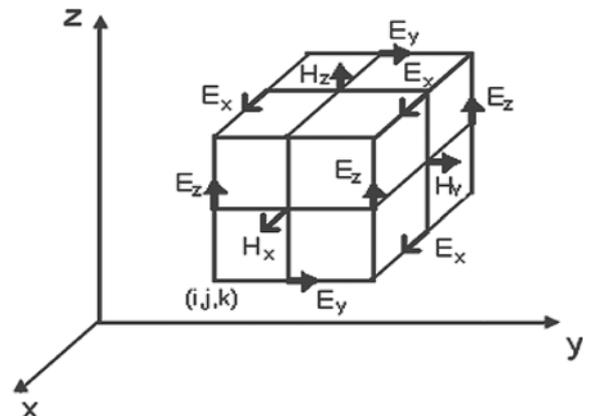
En esta ecuación, los parámetros  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  representan las dimensiones de la red en las respectivas direcciones de los ejes coordenados y  $\Delta t$  es el incremento en la variable temporal el cual se introduce como parámetro de entrada en el software. Recordando que se utilizan aproximaciones en diferencias centrales de segundo orden, las cuales se representan como:

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} = \frac{F^n(i+\frac{1}{2}, j, k) - F^n(i-\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (12)$$

$$\frac{\partial F(i, j, k)}{\partial t} = \frac{F^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - F^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (13)$$

El uso de estas ecuaciones en conjunto con la discretización espacial propuesta por Yee que se observa en la figura 2 siguiente:

Figura 2. Modelo de discretización para campos electromagnéticos propuestos por Yee



Permitiendo evaluar las componentes escalares de los campos, en el modo TE, en la ventana o región de simulación las cuales se reducen a:

$$\frac{1 - \frac{\rho \Delta t}{2\mu}}{1 + \frac{\rho \Delta t}{2\mu}} H_x^{n-\frac{1}{2}} \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{\mu} \frac{1}{1 - \frac{\rho \Delta t}{2\mu}} H_z^{n+\frac{1}{2}} \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) = \left[ \left( \frac{E_x^n(i, j + \frac{1}{2}) - E_x^n(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \right) - \left( \frac{E_y^n(i + \frac{1}{2}, j) - E_x^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \right) \right] \quad (14)$$

$$E_x^n(i, j) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}} E_x^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{1}{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}} \left( \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \quad (15)$$

$$E_y^n(i, j) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}} E_y^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{1}{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}} \left( \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \right) \quad (16)$$

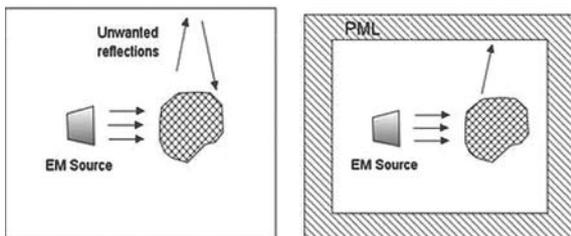
Estas ecuaciones permiten poder obtener valores de las componentes de los campos electromagnéticos en cada una de las posiciones de la región bajo estudio.

Son estas expresiones las que finalmente generan una matriz de posición espacio temporal.

**Capas Perfectamente Casadas, PML:**

Con el fin de evitar reflexiones indeseadas que retornen a la región de estudio y causen errores en la simulación se hace necesario introducir al problema espacial condiciones de frontera apropiadas conocidas como condiciones de frontera absorbentes ABC que inducen las llamadas “Perfect Match Layer” PML como se observan en la figura 3.

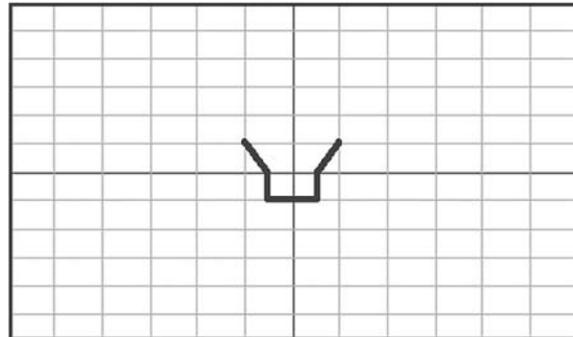
**Figura 3. Región solución sin PML a la izquierda y con condiciones de frontera absorbentes a la derecha**



**METODOLOGÍA**

Para solucionar el problema objeto de estudio se procedió a definir el dominio. Este se puede observar en la figura 4. En esta figura se puede observar la geometría de la bocina cónica y su acoplamiento con la guía de onda, además de 10 capas perfectamente casadas que impiden reflexiones espurias de las ondas en el dominio solución.

**Figura 4. Geometría de la corneta acoplada al guía de onda y 10 capas para PML a su alrededor**



Para la aplicación bajo estudio la longitud de onda debe ser del orden de 1 cm lo que implicaría una resolución espacial de la red  $\Delta < \lambda / 20$ . En cuanto a la resolución temporal, esta debe ser escogida cuidadosamente ya que de ella depende la estabilidad del método. Nótese que esta resolución temporal depende intrínsecamente de la espacial como se muestra en la ecuación (9).

Para el caso bidimensional si en la ecuación (9) hacemos  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ , entonces esta se reduce a:

$$\Delta t = \frac{\Delta}{2 \cdot c_0} \quad (17)$$

Para la estructura en estudio, corneta más guía de onda, los modos de propagación se encuentran en términos de las funciones de Bessel y el modo dominante es el  $TE_{11}$ .

La guía de onda se caracteriza por parámetros eléctricos que a manera de ejemplo para él en el espacio libre se describen como:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{3.41 \cdot a}\right)^2}} \quad (18)$$

Donde “a” es el radio de la guía de onda y  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el espacio libre. Si nos remitimos al manual de antenas de la *IEEE* para la banda *Ka* correspondiente a la región de 50 Ghertz, se encuentra que un “a” óptimo debe ser del orden de 1.02 cm. Al reemplazar estos datos en la ecuación arriba se obtiene una  $\lambda_g = 1,47$  cm.

### RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTRO-MAGNÉTICAS UTILIZANDO FDTD

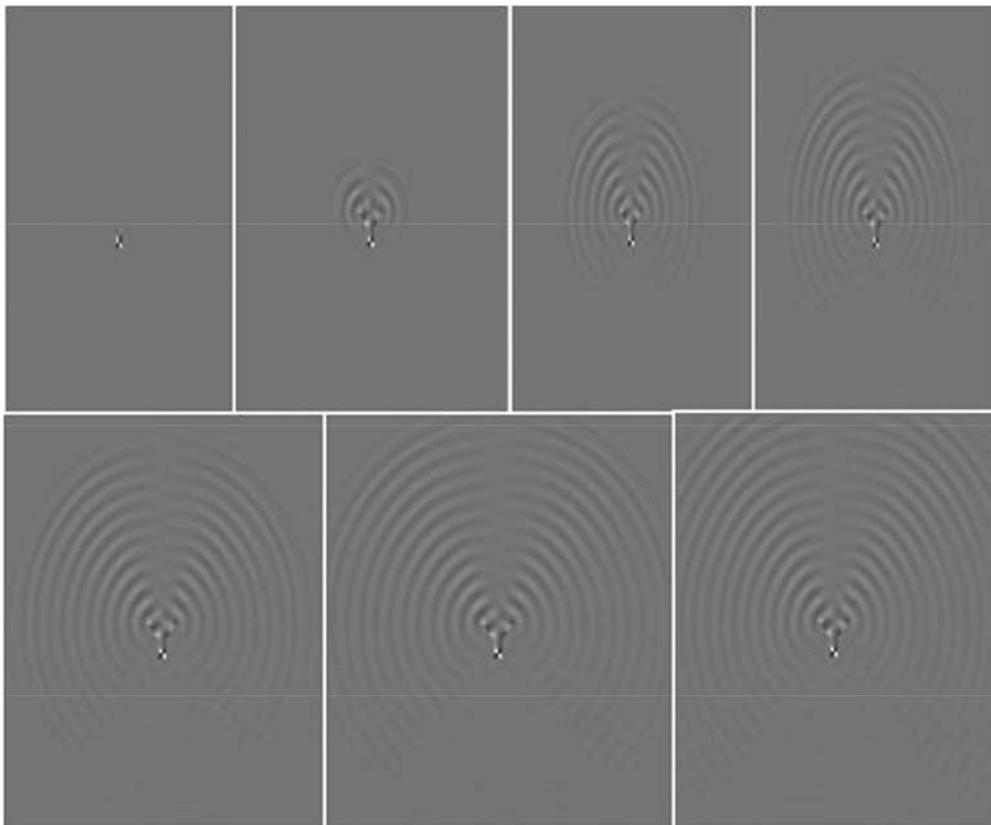
Para la simulación se implementó un software en Matlab aprovechando las facilidades que este tiene para desarrollar interfaces gráficas. El soft-

ware aun está en proceso de depuración implicando esto que aun no se han optimizado algunas líneas que deben disminuir la carga computacional y por consiguiente el tiempo de cómputo.

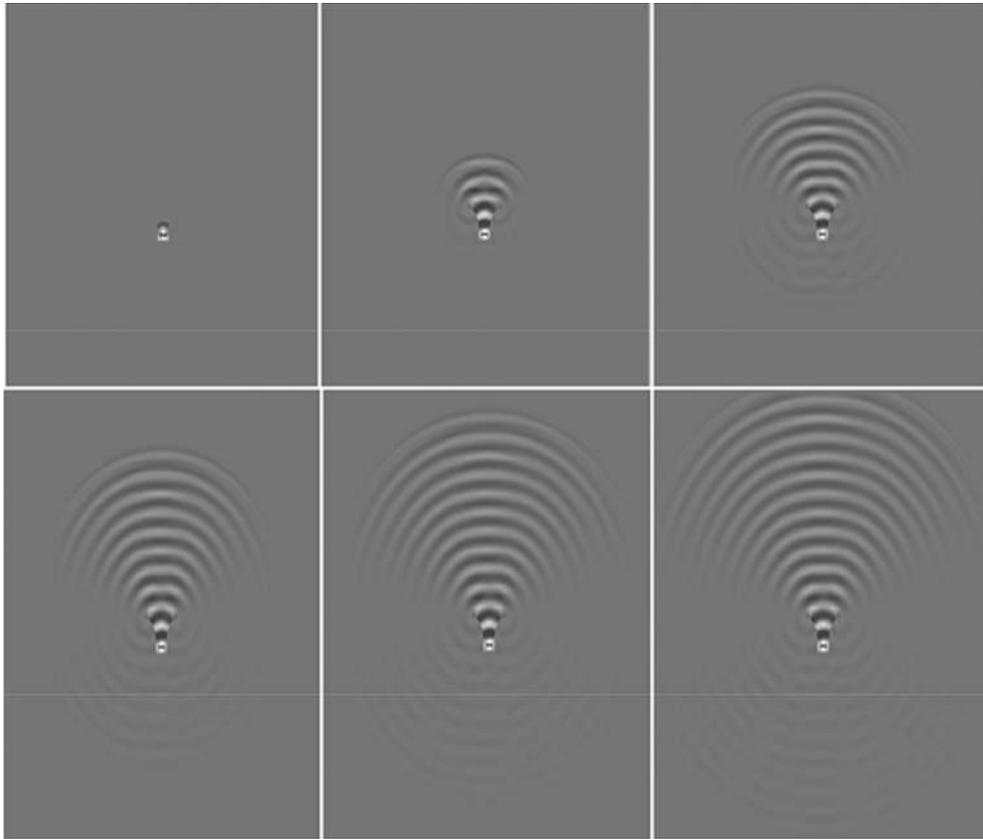
Evolución temporal de la componente x del campo eléctrico en función del tiempo con una intensidad de campo de 50 [V/m]. En esta figura se observa el patrón de radiación de la componente estudiada notándose cómo se propaga está en el perfil 2-d. La propagación es simétrica, armónica y pulsada indicando esto que se simuló una estructura de corneta acoplada a una guía de onda de perfil circular con bajas pérdidas y que no se presentaron reflexiones espurias en el proceso de simulación.

Evolución temporal de la componente y del campo magnético en función del tiempo con una intensidad de campo de 50. En esta figura se ob-

Figura 5. Evolución temporal de la componente x del campo eléctrico para pasos de  $t = 10\Delta t$ ,  $t = 200\Delta t$ ,  $t = 400\Delta t$ ,  $t = 500\Delta t$ ,  $t = 600\Delta t$ ,  $t = 800\Delta t$ ,  $t = 900\Delta t$  y  $t = 1000\Delta t$  respectivamente



**Figura 6. Evolución temporal de la componente y del campo magnético para pasos de  $t = 10\Delta t$ ,  $t = 400\Delta t$ ,  $t = 600\Delta t$ ,  $t = 800\Delta t$ ,  $t = 900\Delta t$  y  $t = 1000\Delta t$  respectivamente**



serva el patrón de radiación de la componente estudiada notándose cómo se propaga está en el perfil 2-d. La propagación es simétrica, armónica y pulsada indicando esto que se simuló una estructura de corneta acoplada a una guía de onda de perfil circular con bajas pérdidas y que no se presentaron reflexiones espurias en el proceso de simulación.

## CONCLUSIONES

Como resultados parciales relevantes se puede concluir que se realizó un estudio teórico de los fundamentos del método de diferencias finitas con la variante introducida por Yee denominada método de diferencias finitas en el dominio del tiempo la cual permitió estudiar la evolución de los campos electromagnéticos, en dos dimensiones, en un problema real de interés científico y tecnológico como lo es el estudio de la evolución

espacio temporal de los campos emitidos por una estructura de antena conformada por una corneta acoplada direccionalmente a una guía de onda circular. El estudio permitió observar las ventajas de la introducción de condiciones de frontera absorbentes del tipo ABC que evitan reflexiones que perjudican la simulación incrementando la carga computacional que ya es bastante grande. Estas fronteras absorbentes se consiguieron introduciendo 10 capas perfectamente acopladas, PML, alrededor de la estructura. En la simulación obtenida se observan los diferentes patrones de radiación concuerdan con la dirección en que se muestra la apertura numérica de la antena.

El algoritmo implementado en Matlab permitió el desarrollo e implementación de un software, aun no optimizado, que permite observar gráficamente la evolución temporal de los patrones estudiados.



---

## BIBLIOGRAFÍA

---

1. YEE, K. S. (1996). "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media". *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, Vol. AP-17, pp. 585-589.
2. KUNZ, K. S. and LUEBBERS, R. J. (1993). *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*. Boca Ratón, FL. CRC Press.
3. LUEBBERS, R.; HUNSBERGER, F.; KUNZ, K.; STANDLER, R. and SCHNEIDER, M. "A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials". *IEEE Trans. Electromag. Compat.* Vol. EMC-32, pp. 222-227, Aug. 1990.
4. TAFLOVE, A. (1998). *Advances in Computation Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Boston, MA: Artech House.
5. JOSEPH, R. M.; HAGNESS, S. C. and TAFLOVE, A. "Direct time integration of Maxwell's equations in linear dispersive media with absorption for scattering and propagation of femtosecond electromagnetic pulses". *Optics Letters*, Vol. 16, pp. 1412-1414, sept. 1991.
6. SULLIVAN, D. M. "Frequency-dependent FDTD methods using Z transforms". *IEEE Trans. Antenna Prop.*, Vol. AP-40, pp. 1223-1230, oct. 1992.
7. BERENGER, J. P. (1994). "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves". *J. Comput. Phys.*, Vol. 114, pp. 185-200.
8. SACKS, Z. S.; KINGSLAND, D. M.; LEE, R. and LEE, J. F. "A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition". *IEEE Trans. Anten. and Prop.*, Vol. 43, pp. 1460-1463, dec. 1995.