

## ROBÓTICA: LA CINEMÁTICA VISTA DESDE LA TEORÍA MATEMÁTICA EN ROBOTS BÍPEDOS\*

Por: José Ramón Iglesias Gamarra\*\*

Fecha de recibido: 1 de julio de 2010 • Fecha de aceptación: 30 de septiembre de 2010

### RESUMEN:

Este trabajo aborda la investigación en robótica utilizando técnicas de Geometría Diferencial, basadas en la teoría matemática de Grupos y Álgebras de Lie y Algoritmos de Denavit-Hatemberg y herramientas de Geometría Computacional para el análisis de interfaces en evolución.

Esta investigación con robots tiene como una de sus fases dentro de sus objetivos la resolución completa del problema de Locomoción y Navegación Bípeda de Robots Humanoides. Para ello, utilizamos nuevos modelos y algoritmos geométricos de propósito general, no presentados anteriormente en la literatura.

El nuevo algoritmo "Un Paso Adelante" (UPA), resuelve la locomoción bípeda de un humanoide, basándose en el nuevo modelo "División Cinemática Sagital" (DCS).

El nuevo algoritmo "Método Modificado de Marcha Rápida" (M3R) proporciona trayectorias libres de colisiones para resolver problemas de planificación, sea cual fuere la estructura del entorno de trabajo. Para la navegación del robot humanoide, introducimos el nuevo modelo "Trayectoria Corporal Global" (TCG). Los nuevos modelos y algoritmos introducidos en esta investigación, se están probando en experimentos reales con el humanoide que estamos trabajando en la Universidad del Magdalena.

### PALABRAS CLAVE:

Robots humanoides, Locomoción, Manipulación, Cognición, Productos de exponenciales, Screw.



\* Artículo resultado de la investigación Robot bípedo humanoide. Principios de un sistema cognitivo artificial. Grupo de investigación: Control, Automatización, Robótica e Inteligencia Computacional.

\*\* Ingeniero Electrónico, Magíster en Sistemas Computacionales, Doctorando en Ingeniería con énfasis en Control y Robótica, profesor de Tiempo Parcial en robótica. joseamon\_iglesiasg@hotmail.com





11

## ROBOTICS: KINEMATICS VIEW FROM THE MATHEMATICAL THEORY INTO BIPEDAL ROBOTS

By: José Ramón Iglesias Gamarra

### ABSTRACT:

This work explores the research on robotics using some Differential Geometry techniques based on the mathematical theory of Lie Groups and Algebras, and some Computational Geometry tools from the analysis of evolving interfaces.

This research with robots has as one of its phases within its objectives the full resolution of the problem of locomotion and navigation Bipedal of humanoid robots. To do this, we used new models and geometric algorithms, general-purpose, not previously submitted in the literature. The new “One Step Goal” algorithm (OSG), resolves the bipedal locomotion

based upon the new humanoid model called “Sagittal Kinematics Division” (SKD). The new algorithm “Fast Marching Method Modified” (FM3) delivers collision-free trajectories to solve the path planning problems, whatever the structure of the working environment. For the humanoid robot navigation problem, the new model “Whole Body Trajectory” (WBT) is introduced. The new models and algorithms introduced by this research have been successfully tested through real experiments with the humanoid in the University of Magdalena.

### KEY WORDS:

Robot humanoid, Locomotion, Manipulation, Cognition, Products of exponentials, Screw.

## INTRODUCCIÓN

El tratamiento de la cinemática a discutir se basa en nuestro trabajo de investigación de un “Robot bípedo humanoide. Principios de un sistema cognitivo artificial” en la Universidad del Magdalena en el programa de Ingeniería Electrónica y que en esta fase tiene como finalidad el estudio del movimiento de la cinemática basándonos en una comparación entre el álgebra de Lie y la formulación de Denavit-Hartenberg. El POE (Producto de Exponenciales) de Lie proporciona una formulación elegante de varios problemas canónicos, la idea de este método es reducir la complejidad del problema cinemático inverso mediante la división del mismo en subproblemas más sencillos, que ocurren de forma frecuente en la mecánica de robots, y cuyas soluciones geométricas son conocidas.

La solución a estos problemas no es tan simple debido a que las ecuaciones cinemáticas son no lineales eso nos lleva a decir que el desarrollo de las mismas no es siempre sencillo (o incluso posible) en una forma cerrada. Además, surgen preguntas sobre si existe una solución o existen múltiples soluciones. Utilizando a Denavit-Hartenberg proponemos un método sistemático para describir y representar la geometría espacial de los elementos de una cadena cinemática, y en particular de un robot, con respecto a un sistema de referencia fijo. Este método utiliza una matriz de transformación homogénea para describir la relación espacial entre dos elementos rígidos adyacentes, reduciéndose el problema cinemático directo a encontrar una matriz de transformación homogénea 4x4 que relacione la localización espacial del extremo del robot con respecto al sistema de coordenadas de su base.

En los problemas de robótica podemos construir la cinemática basándonos en las técnicas de Lie y Denavit-Hartenberg. Con Lie solo son necesarios dos sistemas de referencia, estos son, el de la base y el del eslabón cinemático de interés, que normalmente es el sistema de referencia de la herramienta. Por el contrario, con Denavit-

Hartenberg debemos construir los sistemas de referencia de todos los eslabones de las cadenas cinemáticas del mecanismo.

Con el POE tenemos la facilidad para obtener el Manipulador Jacobiano (especifica la asignación de las velocidades en espacio de articulaciones a las velocidades en espacio cartesiano, la naturaleza de esta asignación cambia a medida que varía la configuración del manipulador), y las velocidades del robot sin necesidad de calcular derivadas, sino con una caracterización geométrica que permite describir las singularidades de una forma sencilla. Además, la representación de la cinemática del sólido rígido basada en la teoría de Lie no sufre de singularidades provocadas por el uso de coordenadas locales, cosa que es inevitable si usamos algún otro tipo de representación para las rotaciones (e.g. ángulos de Euler).

Tradicionalmente, se describe el Jacobiano de un determinado movimiento de un sólido rígido, mediante la diferenciación de la cinemática directa de ese movimiento. Sin embargo, este Jacobiano no es una cantidad natural, puesto que la descripción solo es válida de forma local. Para corregir este problema, se define un nuevo concepto en términos de twists, que llamaremos Manipulador Jacobiano de una cinemática directa. Veremos que el POE conduce a descripciones naturales y explícitas del Manipulador Jacobiano, que destacan la geometría de un mecanismo y no tiene ninguna de las desventajas de la representación local.

La descripción tradicional del Jacobiano es la que usamos en Denavit-Hartenberg, se obtiene por diferenciación del mapa cinemático directo, pero resulta que esta magnitud no es natural, mientras que el POE conduce a una representación explícita del Manipulador Jacobiano que es realmente natural y que resalta las propiedades geométricas del mecanismo, sin tener las desventajas de las representaciones locales, sin embargo la cinemática del robot trata también de encontrar las relaciones entre las velocidades del movimiento de las articulaciones y las del extremo. Esta rela-

ción viene dada por el modelo diferencial expresado mediante la matriz jacobiana.

## METODOLOGÍA

El tratamiento del movimiento que utilizan muchos autores se basa en la matemática de Grupos de Lie y la teoría de screws. Nosotros en este trabajo de investigación estamos demostrando cómo usar más eficientemente la formulación de parámetros de Denavit-Hartenberg (D-H).

El teorema de Chasles establece que cualquier movimiento de un sólido rígido puede ser realizado mediante una rotación alrededor de un eje más una traslación paralela a ese mismo eje, esto es, mediante un movimiento de tipo screw. Pero resulta que la versión infinitesimal de ese movimiento es un elemento del álgebra de Lie, esto es, un *twist*  $\xi^{\wedge}$ .

El teorema de Poincot establece que cualquier colección de esfuerzos aplicados a un sólido rígido son equivalentes a una fuerza aplicada en la dirección de un eje fijo, más un par aplicado a ese mismo eje, esto es, mediante un esfuerzo de tipo screw. Pero resulta que la versión infinitesimal de ese esfuerzo, es la representación dual de un elemento del álgebra de Lie, esto es, el elemento que llamamos *wrench*.

Los puntos principales de la teoría mecánica de screws y la matemática de Grupos de Lie asociada son las siguientes:

- Permiten una descripción realmente geométrica del movimiento que facilita el análisis mecánico.
- Permiten una descripción sin singularidades debidas al uso de coordenadas locales (como sucede por el contrario con las representaciones de ángulos de Euler y las de Denavit-Hartenberg), ya que es posible el uso de solo dos sistemas coordenados de referencia, el de la base **S** y el de la herramienta **H**.
- Permite usar la misma representación matemática para diferentes tipos de movimientos,

esto es, tanto para traslaciones como para rotaciones.

- Proporciona una descripción explícita realmente natural del Manipulador Jacobiano, que no tiene las desventajas de la representación local del tradicional Jacobiano.

Para representar el movimiento de un sólido rígido utilizaremos la transformación exponencial de un *twist*, que proporciona el movimiento relativo del mismo.

La interpretación de esta transformación no es la relación entre los puntos de un sistema de coordenadas a otro, sino la relación entre las coordenadas iniciales de los puntos con sus coordenadas finales, tras aplicar un movimiento al sólido rígido. Puesto que las cadenas abiertas de sólidos rígidos (e.g., robots manipuladores) están constituidas mediante la conexión de diferentes articulaciones (típicamente de revolución o prismáticas), usando eslabones rígidos, el movimiento queda restringido a un subgrupo de **SE(3)**, haciendo de la exponencial de un *twist* la representación natural para el análisis mecánico de estos sistemas.

El trabajo planteado parte fundamentalmente del uso del álgebra vectorial y matricial para representar y describir la localización de un objeto en el espacio tridimensional con respecto a un sistema de referencia fijo. Como un robot se puede considerar como una cadena cinemática formada por objetos rígidos o eslabones unidos entre sí por articulaciones, podemos establecer un sistema de referencia fijo situado en la base del robot y describir la localización de cada uno de los eslabones con respecto a dicho sistema de referencia. De esta forma, reducimos el problema cinemático directo solo con encontrar una matriz homogénea de transformación **T** que nos permita relacionar la posición y orientación del extremo del robot con el sistema de referencia fijo situado en la base del mismo.

Al escoger adecuadamente los sistemas de coordenadas asociadas a cada eslabón, es posible

pasar de uno al siguiente eslabón mediante 4 transformaciones básicas que dependen exclusivamente de las características geométricas del eslabón.

Estas transformaciones básicas consisten en una sucesión de rotaciones y traslaciones que permiten relacionar el sistema de referencia del elemento  $i$  con el sistema del elemento  $i-1$ . Las transformaciones en cuestión son las siguientes:

- Rotación alrededor del eje  $z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$ .
- Traslación a lo largo de  $Z_{i-1}$  una distancia  $d_i$ ; vector  $d_i(0, 0, d_i)$ .
- Traslación a lo largo de  $X_i$  una distancia  $a_i$ ; vector  $a_i(0,0,a_i)$ .
- Rotación alrededor del eje  $X_i$  un ángulo  $\alpha_i$ .

Dado que el producto de matrices no es conmutativo, las transformaciones se han de realizar en el orden indicado.

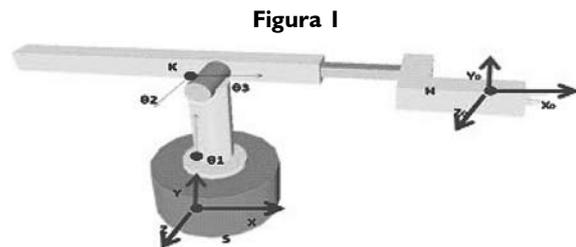
También hay que destacar que para el planteamiento y resolución de los problemas dinámicos, el álgebra de Lie nos proporciona herramientas para un cálculo sistemático geométrico.

Por todo lo explicado anteriormente, en general (aunque existen casos particulares), el formalismo del POE de Lie es una alternativa al de los Parámetros de Denavit-Hartenberg.

Para un mejor entendimiento de las diferencias entre la técnica de Lie y la de Denavit-Hartenberg, vamos a desarrollar un ejemplo detallado en los siguientes apartados para un robot de 3 GDL (Grados de Libertad), con resultados numéricos que comparan los algoritmos basados en las dos formulaciones matemáticas. En la comparación práctica entre los formalismos matemáticos, hallaremos las soluciones cinemáticas y dinámicas de un robot sencillo de 3 GDL, que tiene dos articulaciones de rotación ( $\theta_1, \theta_2$ ) y una de traslación  $\theta_3$ . Se puede ver el robot en el gráfico de la Figura 1, junto con un esquema cinemático para mayor claridad de análisis.

### Solución de Lie para un robot de 3 GDL

En primer lugar veremos que utilizando el POE de álgebra de Lie es muy sencillo resolver tanto la cinemática directa como inversa, con tan solo conocer el esquema cinemática del robot, esto es, los ejes de actuación de los GDL, la posición inicial de la herramienta  $H$  y el sistema de referencia inercial  $S$ . El problema cinemático inverso requiere utilizar los problemas canónicos y un poco de cálculo algebraico. El método puede parecer un poco confuso la primera vez que se utiliza, pero tras unos ejemplos, se aprecia la sencillez, potencia y elegancia de este planteamiento matemático.



Los ejes de aplicación de los 3 GDL vienen dados por:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, los valores de los twists  $\xi$  para cada una de las articulaciones quedan formulados de una forma sencilla por

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_1 * k \\ w_1 \end{bmatrix}; \xi_2 = \begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -w_2 * k \\ w_2 \end{bmatrix}; \xi_3 = \begin{bmatrix} v_3 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siendo la fórmula para la transformación entre  $H$  y  $S$  en la configuración de referencia del manipulador  $g_{sh}(0)$ , muy sencilla de definir así:

$$g_{sh}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & H - k \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El problema cinemático directo se soluciona con la aplicación del POE que nos da el valor de  $\mathbf{g}_{sh}(\theta)$ . Nótese que el tratamiento matemático de la articulación de translación  $\theta_3$  es el mismo que el de las articulaciones de rotación:

$$g_{sh}(\theta) = e^{\xi_1\theta_1} * e^{\xi_2\theta_2} * e^{\xi_3\theta_3} * g_{sh}(0)$$

Para resolver el problema cinemático inverso mediante álgebra de Lie, aplicamos los problemas canónicos de una forma sistemática, operando sobre la ecuación anterior y con dos pasos sencillos.

### Primer paso - Obtención de la variable $\theta_3$ :

Para ello, pasamos  $\mathbf{g}_{sh}(0)$  al otro lado de la ecuación y aplicamos ambos lados de esta ecuación al punto  $\mathbf{H}$ , para posteriormente hallar el módulo de la diferencia de esos términos con el punto  $\mathbf{k}$ , con lo que obtendremos la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} & \| g_{sh}(\theta) * g_{sh}(0)^{-1} * H - k \| \\ & = \| e^{\xi_1\theta_1} * e^{\xi_2\theta_2} * e^{\xi_3\theta_3} * H - k \| \end{aligned}$$

Hemos operado de este modo para obtener la ecuación anterior en la que las exponenciales de las variables  $\theta_1$  y  $\theta_2$  no tienen ningún efecto y se pueden eliminar. Por todo ello, la ecuación tiene el término izquierdo conocido (valor  $\delta$ ) y un término derecho que solo se ve afectado por el tercer **GDL**, por lo que queda transformada en la ecuación siguiente, que no es sino la formulación del **problema canónico Pardos-Uno**.

$$\delta = \| e^{\xi_3\theta_3} * H - k \| \xrightarrow{\text{pardos-UNO}} \theta_3 \text{ DOBLE}$$

**Segundo paso-Obtención de las variables  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :** Para ello pasamos  $\mathbf{g}_{sh}(0)$  al otro lado de la ecuación

$$g_{sh}(\theta) = e^{\xi_1\theta_1} * e^{\xi_2\theta_2} * e^{\xi_3\theta_3} * g_{sh}(0)$$

y aplicamos ambos lados de esta ecuación al punto  $\mathbf{H}$ , para obtener la ecuación

$$g_{sh}(\theta) * g_{sh}(0)^{-1} * H = e^{\xi_1\theta_1} * e^{\xi_2\theta_2} * e^{\xi_3\theta_3} * H$$

que tiene el término izquierdo conocido (igual a un punto cualquiera que llamaremos  $k'$ ) y un término derecho con el producto de la exponencial de  $\theta_3$  por el punto  $\mathbf{H}$ , que será también un valor conocido (igual a un punto que llamaremos  $p'$ ), al haber obtenido  $\theta_3$  en el primer paso. De esta forma, la ecuación

$$g_{sh}(\theta) * g_{sh}(0)^{-1} * H = e^{\xi_1\theta_1} * e^{\xi_2\theta_2} * e^{\xi_3\theta_3} * H$$

queda transformada en

$$k' = e^{\xi_1\theta_1} * e^{\xi_2\theta_2} * p' \xrightarrow{\text{padenKahan-DOS}} \theta_1, \theta_2 \text{ DOBLE}$$

que no es sino la formulación del problema canónico PadenKahan-Dos, por lo que por aplicación geométrica de este obtenemos los dos valores posibles para la pareja de variables  $\theta_2$  y  $\theta_1$ .

De esta forma queda resuelto de forma geométrica, determinista, cerrada y completa el problema cinemático inverso. Lo que es más, no solo se ha encontrado una solución para el problema (i.e., un conjunto de valores  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ), sino que de existir, se han resuelto las cuatro posibles soluciones en una sola formulación. Obsérvese para ello las combinaciones de las posibles soluciones como sigue:

$$N \text{ Soluciones} = \theta_3 \text{ DOBLE} \times \theta_2 \text{ DOBLE} \times \theta_1 \text{ DOBLE} = 4$$

### Solución de Denavit-Hartenberg para un robot de 3 GDL

Analizamos el mismo robot que en el apartado anterior (ver Figura 1), pero ahora utilizando los parámetros de Denavit-Hartenberg (**D-H**). Definamos los pasos del algoritmo D-H para obtener los parámetros correspondientes a un robot que permiten resolver su problema cinemático directo. así:

**Paso I.** Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acaban-

do con  $n$  (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

**Paso 2.** Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad y acabando en  $n$ ).

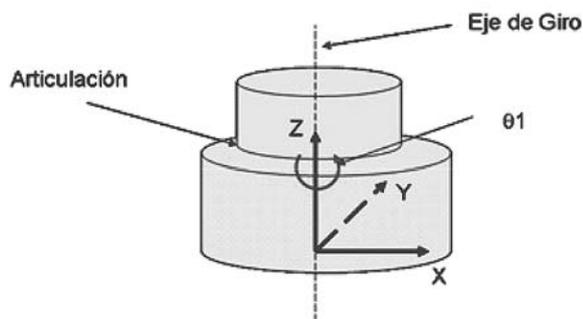
**Paso 3.** Localizar el eje de cada articulación. Si esta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

**Paso 4.** Para  $i$  de 0 a  $n-1$ , situar el eje  $Z_i$ , a lo largo del eje de la articulación  $i$ .

**Paso 5.** Comenzamos situando un sistema de coordenadas ( $S_0$ ) en la base. El eje  $X_0$  debe ser perpendicular al  $Z_0$  y  $Z_1$ . (Si  $Z_0$  y  $Z_1$  son paralelos, se recomienda seguir un criterio de simetría o de simplicidad para definir este eje, de manera que el proceso de descripción de la cadena cinemática sea factible).  $Y_0$  se situará de modo que formen un sistema de mano derecha.

Obtener  $\theta_1$  como el ángulo que hay que girar en torno a  $Z_0$ .

Eje:



**Paso 6.** Para  $i$  de 1 a  $n$ , situar el sistema ( $S_i$ ) en la articulación  $i$ .

Situación  $Z_i$  a lo largo del eje de la articulación  $i$ .  
Situación  $X_i$  en la línea normal común a  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$ .  
Situación  $Y_i$  de modo que forme un sistema de mano derecha.

Obtener  $\theta_i$  como el ángulo que hay que girar en

torno a  $Z_i$  para que  $X_{i-1}$  y  $X_i$  queden paralelos.

Obtener  $d_i$  como la distancia, medida a lo largo de  $Z_{i-1}$ , que habría que desplazar ( $S_i$ ) para que  $X_{i-1}$  y  $X_i$  quedasen alineados.

Obtener  $a_i$  como la distancia medida a lo largo de  $X_{i-1}$  que habría que desplazar el sistema ( $S_{i-1}$ ) para que su origen coincidiese con ( $S_i$ ).

Obtener  $\alpha_i$  como el ángulo que habría que girar en torno a  $X_i$  (para que coincida con  $X_{i-1}$ ), para que el sistema ( $S_{i-1}$ ) coincidiese totalmente con ( $S_i$ ).

**Paso 7.** Obtener las matrices de transformación de los parámetros  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$ ,  $d_i$ .

**Paso 8.** Luego hallamos la Matriz  $M$  que sería el producto de todas las matrices obtenidas en el paso 7.

**Paso 9.** Las matrices se multiplican conforme van apareciendo en la tabla del algoritmo de Denavit-Hartenberg.

Siguiendo el procedimiento habitual de Denavit-Hartenberg, con la particularidad de que en nuestro ejemplo realizamos un cambio de ejes (i.e. el  $Z$  por el  $Y$ ) para adaptar el algoritmo de **D-H** a la definición estándar de ejes adoptada en esta investigación (ver Figura 1), obtenemos la tabla de parámetros de **D-H** para el robot, que podemos ver en la Figura 2.

Estos parámetros de **D-H** son cuatro para cada articulación, dependen de las características geométricas de cada eslabón y de las articulaciones que le unen con el anterior y el siguiente. Su significado físico es:

- $\theta_i$ : Es el ángulo que forman los ejes  $x_{i-1}$  y  $x_i$  medido en un plano perpendicular al eje  $y_{i-1}$  utilizando la regla de la mano derecha, esto es, la rotación alrededor del eje  $y_{i-1}$ .
- $d_i$ : Es la distancia a lo largo del eje  $y_{i-1}$  desde el origen del sistema de coordenadas anterior hasta la intersección del eje  $y_{i-1}$  con el  $x_i$ , esto es, la traslación a lo largo de  $y_{i-1}$ .
- $a_i$ : Es la distancia a lo largo del eje  $x_i$  que va desde la intersección del eje  $y_{i-1}$  con el eje  $x_i$

hasta el origen del sistema de coordenadas siguiente, en el caso de las articulaciones giratorias. En el caso de las articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia más corta entre los ejes  $\mathbf{y}_{j-1}$  con el  $\mathbf{y}_j$ , esto es, la traslación a lo largo del eje  $\mathbf{x}_j$ .

- **j:** Es el ángulo de separación del eje  $\mathbf{y}_{j-1}$  y el eje  $\mathbf{y}_j$  medido en un plano perpendicular al eje  $\mathbf{x}_j$  utilizando la regla de la mano derecha, esto es, la rotación alrededor del eje  $\mathbf{x}_j$ .

Una vez obtenidos esos parámetros, podemos calcular la matriz de transformación homogénea  $\mathbf{A}_{j,j+1}$  que relaciona el sistema de referencia de un eslabón de la cadena cinemática con la Figura 2, según la ecuación “(2-63)”.

Figura 2

Articulaciones	$\theta_j$	$d_j$	$a_j$	$\alpha_j$
1	$\theta_1$	k - S	0	$90^\circ$
2	$\theta_2 - 90^\circ$	0	0	-90
3	0	$\theta_3 + H - k$	0	0

$$A_{j,j+1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & 0 & \sin\theta_j & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_j & 0 & -\cos\theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_j \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_j & -\sin\alpha_j & 0 \\ 0 & \sin\alpha_j & \cos\alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siendo  $\mathbf{g}_{sh}(\mathbf{0})$ , en este caso formulada según la ecuación siguiente:

$$\mathbf{g}_{sh}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la transformación homogénea que consigue girar el sistema de referencia de la herramienta  $\mathbf{H}$  dado por el formalismo de Denavit-Hartenberg (i.e. en nuestro caso tiene el eje Y sobre el eje de articulación), de forma que el sistema de refe-

rencia de  $\mathbf{H}$  queda como en la Figura 2, para que los resultados numéricos de posición y rotación sean comparables con los obtenidos por el formalismo de Lie.

Como resultado de las anteriores propuestas, el problema cinemático directo del robot queda formulado usando el formalismo de Denavit-Hartenberg como se indica en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{g}_{sh}(\theta) = A_{0,1} * A_{1,2} * A_{2,3} * \mathbf{g}_{sh}(\mathbf{0})$$

donde  $\mathbf{g}_{sh}(\theta)$  es la matriz de transformación homogénea que relaciona el sistema de referencia de la base  $\mathbf{S}$  con el de la herramienta  $\mathbf{H}$ , tal y como aparece en la Figura 2.

Hemos elegido el robot de la figura 1 como ilustración porque al tener solo 3 GDL permite obtener sus soluciones geométricas de una forma analítica, que pudimos comparar de alguna forma con las soluciones sistemáticas de la formulación de Lie y de Denavit-Hartenberg.

### Comparación computacional de Lie vs. Denavit-Hartenberg para robot de 3 GDL

Una vez resuelto el problema del robot utilizando los formalismos del POE de Lie y los parámetros de  $\mathbf{D-H}$ , vamos a presentar en la Figura 3 una tabla comparativa de las implementaciones prácticas de estas soluciones en un computador. Los valores expresados son medias de tiempo, tras realizar una serie de mil ejecuciones.

Es necesario analizar con sumo cuidado el resultado de la comparativa que se resume en la Figura 3 puesto que es difícil extraer una conclusión contundente, ya que si el POE de Lie presenta una solución más elegante, mucho más veloz para resolver el problema cinemático inverso, sin necesidad de derivadas para el Jacobiano y con un cálculo sistemático de la dinámica, los parámetros de Denavit-Hartenberg proporcionan soluciones más rápidas para el problema cinemático directo.

**Figura 3. Tabla Comparativa POE de Lie vs. Parámetros de D-H para el robot**

Formalismo utilizado para el robot	Problema cinamático directo	Problema cinemático inverso	Jacobiano y velocidades	Problema Dinámico
POE de Lie	0.4 ms	2,5 ms	Solución sin derivar	Solución sistemática
Parámetro de D-H	0.2 ms	25 ms	Es necesario Derivar	Solución no sistemática

Pero si pensamos en la utilización del formalismo de Lie para la resolución del problema cinemático directo, podemos decir que el POE presenta matrices recurrentes que hacen que los algoritmos sean más rápidos conforme crece el número de GDL. No obstante, en este ejemplo también queda justificada de forma explícita la razón por la que para muchos robots (i.e. especialmente robots sencillos con pocos GDL) los parámetros de Denavit-Hartenberg siguen siendo un estándar muy utilizado en robótica, sobre todo para la resolución de problemas cinemáticos directos.

Para robots con un número reducido de GDL la elección más eficaz del formalismo a utilizar depende de la aplicación que vayamos a desarrollar. Es para ilustrar esta competencia entre los formalismos de Lie y Denavit-Hartenberg en robots de dos o tres GDL, por lo que elegimos precisamente este ejemplo de robot.

Un caso muy diferente es el que se produce con mecanismos más complejos, como sucede en los robots de seis GDL, para los que la resolución del problema cinemático directo con el POE de Lie se iguala en velocidad a los parámetros de Denavit-Hartenberg, mientras que el problema cinemático inverso que con técnicas de Lie consigue resolver el sistema de doce ecuaciones con seis incógnitas, obteniendo las ocho posibles soluciones de una forma cerrada, sistemática y eficaz, tiene una solución de Denavit-Hartenberg muchísimo más compleja pero más precisa y eficaz.

Para ilustrar la comparación entre el POE de Lie con los parámetros de Denavit-Hartenberg, haremos un símil utilizando la fórmula de Euler como sigue:

$$e^{ix} = \cos x + i * \sin x$$

Mientras que es posible trabajar con aritmética de cosenos y senos para manejar números complejos, resulta evidente que utilizar la expresión canónica exponencial nos permite acceder a herramientas de cálculo mucho más potentes a la hora de manipular complejos. Así de forma semejante, el uso de la matemática de Lie y su expresión canónica del POE, nos permite abordar problemas más complejos de cadenas de sólidos rígidos.

## RESULTADOS

Los resultados obtenidos hasta ahora de la investigación que se viene desarrollando es la creación de un modelo biomecánico de uno de los brazos del robot para poder hallar los parámetros Denavit-Hartenberg, necesarios para determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot. En la figura 4a) se puede apreciar el modelo del brazo robot que está compuesto por tres eslabones: el húmero, el antebrazo y la mano, que se toma como un cuerpo rígido. Los círculos que en su interior tienen blanco y negro representan las masas concentradas de cada eslabón, con una masa extra ubicada en el tórax que se puede apreciar por su interior rojo y negro.

**Figura 4. Modelo del brazo:**  
 a) Modelo biomecánico del brazo derecho,  
 b) Estructura ósea del brazo derecho

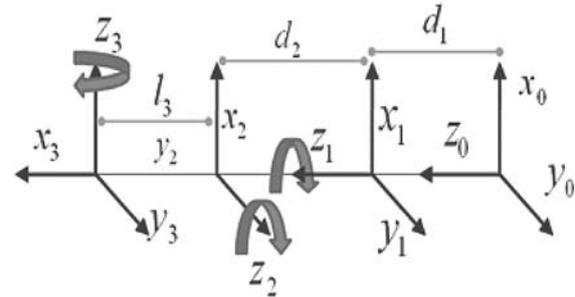


El modelo biomecánico de la extremidad superior para el brazo derecho robot que se planteó anteriormente se define como una cadena abierta de tres eslabones, conectados entre sí por tres articulaciones. Con este modelo definido se prosigue a la obtención de los parámetros Denavit-Hartenberg. Observaremos los parámetros D-H de cada articulación, empezando por el hombro que posee tres grados de libertad, el codo con dos grados de libertad, la muñeca con dos grados de libertad y la mano que se toma como un cuerpo rígido. El hombro posee tres grados de libertad. Lo que le permite orientar la extremidad superior en relación a los tres planos del espacio. A continuación se muestran los ejes de rotación del hombro, estos ejes de rotación están representados por la letra Z en los sistemas de coordenadas de la figura 5 a). Los movimientos del hombro que se estudiaron en este modelo son: los movimientos de flexoextensión que están representados por  $Z_1$ , los movimientos de aducción-abducción son representados por  $Z_2$  y el movimiento de rotación que se representa con  $Z_3$ . En la figura 5 b) se pueden observar los parámetros D-H del hombro.

La representación del modelo del codo con sus ejes de rotación se pueden observar en la figura 6a) donde se muestran y los movimientos de flexoextensión representados por  $Z_4$  y los movimientos de pronosupinación que están representados por  $Z_5$ . Los ejes de rotación están

representados por las Z en los sistemas de coordenadas. En la figura 6b) se pueden observar los parámetros D-H del codo.

**Figura 5. Modelo matemático del hombro**

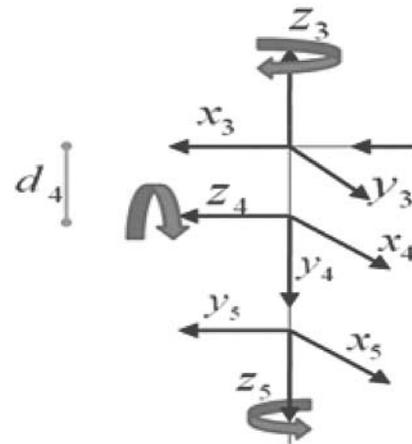


a)

Articulaciones	$\theta_j$	$d_j$	$a_j$	$\alpha_j$
1	$\theta_j$	$d_j$	0	0
2	$\theta_j$	$d_j$	0	$90^\circ$
3	$\theta_j$	$d_j$	$l_2$	$-90$

b)

**Figura 6. Modelo matemático del codo**



a)

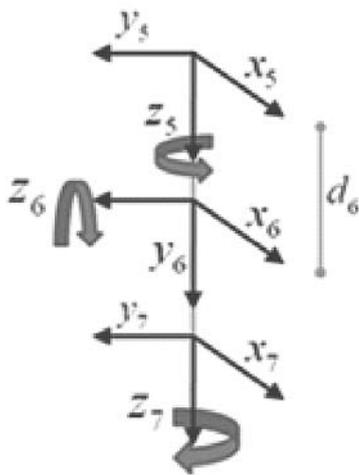
Articulaciones	$\theta_j$	$d_j$	$a_j$	$\alpha_j$
4	$90^\circ$	$d_j$	0	$90^\circ$
5	0	0	0	$90^\circ$

b)

Los movimientos de la muñeca se efectúan en torno a dos ejes, uno de los movimientos que se

realizan en torno a estos ejes, es el movimiento de flexoextensión representado por  $Z_6$  y el otro eje se encarga de los movimientos de aducción-abducción representados por  $Z_7$ . En la figura 7a) se pueden apreciar los ejes de rotación del modelo de muñeca donde las  $Z$  indican el eje en que gira cada sistema de coordenadas. Además se muestran los parámetros D-H de la muñeca en la figura 7b).

Figura 7. Parámetros D-H de la muñeca



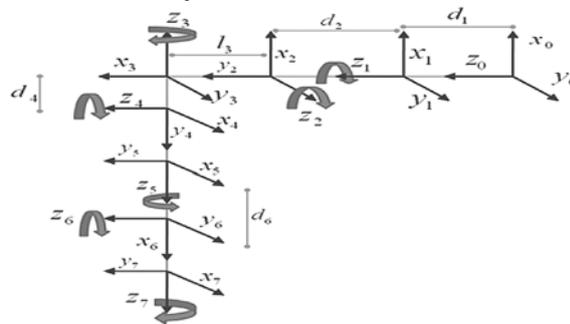
a)

Articulaciones	$\theta_j$	$d_j$	$a_j$	$\alpha_j$
6	$0^\circ$	$d_6$	0	$-90^\circ$
7	$0^\circ$	0	0	$90^\circ$

b)

El modelo completo del brazo robot que planteamos se puede apreciar en la figura 8, este modelo se realiza para hallar los parámetros D-H, la finalidad de estos parámetros es determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot. Estos parámetros se desarrollaron siguiendo el algoritmo de Denavit-Hartenberg para la obtención del modelo cinemático directo. Cabe resaltar que los cuatro parámetros D-H ( $\theta_j, d_j, a_j, \alpha_j$ ) dependen del diseño geométrico de cada eslabón. Calculados los parámetros D-H de cada eslabón, se pasa a calcular las matrices A, estos valores se pasan a unas matrices en Matlab para obtener el producto del conjunto de ma-

Figura 8. Asignación de ejes de referencia para el brazo robot



trices para calcular la matriz T, que es donde se consideran todos los grados de libertad.

### CONCLUSIÓN

En conclusión, la utilización de las herramientas matemáticas procedentes de los Grupos y Álgebras de Lie, como el formalismo canónico del POE, nos permite abordar la creación de algoritmos para el control cinemático y dinámico de robots complejos (i.e. con muchos GDL), pero hasta ahora sin demostrar que tengan mayor ventaja frente al uso de los parámetros de Denavit-Hartenberg.

Por todo ello, adoptamos los parámetros de Denavit-Hartenberg en los nuevos desarrollos que se presentan en nuestra investigación para el **Robot bípedo humanoide. Principios de un sistema cognitivo artificial** que tiene 20 GDL.

---

**BIBLIOGRAFÍA**


---

ARBULÚ, M.; PRIETO, F.; CABAS, L. M.; STAROVEROV, P.; KAYNOV, D.; BALAGUER, C. (2005, septiembre). ZMP Human Measure System. In *8th International Conference on Climbing and Walking Robots (Clawar'2005)*. London. United Kingdom.

CHESTNUTT, J.; KUFFNER, J.; NISHIWAKI, K. and KAGAMI, S. (2003). Planning Biped Navigation Strategies in Complex Environments. In *IEEE International Conf. on Humanoid Robotics*.

DAVISON, A. J.; GONZÁLEZ, Y. and KITA, N. (2004). Real-Time 3D SLAM with Wide-Angle Vision. In *Proc. IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles*.

DAVISON, A. J. (2003). Real-time simultaneous localisation and mapping with a single camera. In *Proceedings of the Ninth International Conference on Computer Vision (ICCV'03)*, pp. 1403-1410, Nice, France.

DENAVIT, J. and HARTENBERG, R. S. (1955). A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics*, pp. 215-221.

GEROIMENKO, V. and CHEN, C. (2004). *Visualizing Information Using SVG and X3D*. Springer.

GOSWAMI, A. (1999, june). Postural Stability of Biped Robots and the Foot-Rotation Indicator (FRI) Point. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 18, No. 6, pp. 523-533.

GREEN, M. and LIMEBEER, D. J. N. (1995). *Linear Robust Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

GUPTA, K. C. (1986). Kinematic analysis of manipulators using the zero reference position description. *Int. J. Robotics Research*. Vol. 5.

HARDT, M.; KREUTZ-DELGADO, K.; and WILLIAM HELTON, J. (1998). Minimal Energy Control of a Biped Robot with Numerical Methods and a Recursive Symbolic Dynamic Model. In *Proc. 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 413-6.

HAYATI, S. (1986). Hybrid position force control of multi-arm cooperating robots. In *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*. San Francisco, CA: IEEE, pp. 82-89.

HIRAI, K.; HIROSE, M.; HAIKAWA, Y. and TAKENAKA (1998). The Development of Honda Humanoid Robot. In *IEEE Conference on Robotics and Automation*. v2, pp. 1321-1326.

HSU, D.; KAVRAKI, L.; LATOMBE, J.; MOTWANI, R. and SORKIN, S. (1998). On finding narrow passages with probabilistic roadmap planners. *Algorithmic Foundation of Robotics*, A K Peters Ltd, pp. 141-153.

HWANG, Y. K. and AHUJA, N. (1992). Gross motion planning - a survey. *ACM Comput. Surv.*, 24(3):219-291.

---

JAIN, A. and RODRÍGUEZ, G. (1995). Diagonalized Lagrangian Robot Dynamics. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 11, No. 4, pp. 571-584.

JAIN, A.; RODRÍGUEZ, G. and KREUTZ-DELGADO, K. (1990). Multi-arm grasp and manipulation of objects with internal degrees of freedom. In *Proc. 29th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 3110-11.

KAHAN, W. (1983). *Lectures on computational aspects of geometry*. Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California, Berkeley. Unpublished.

KAJITA, S. and TANI, K. (1996). Experimental Study of Biped Dynamic Walking. *IEEE Control Systems*, pp. 13-19.

KANEHIRO, F.; FUJIWARA, K. et al. (2002, Mayo). Open Architecture Humanoid Robotics Platform. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation*. Washington, DC.

KANEHIRO, F.; YOSHIMI, T.; KAJITA, S.; MORISAWA, M. et al. (2005, april). Whole Body Locomotion Planning of Humanoid Robots based on a 3D Grid Map. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*.

KANEKO, K.; KAJITA, S.; KANEHIRO, F.; YOKOI, K.; FUJIWARA, K.; HIRUKAWA, H.; KAWASAKI, T.; HIRATA, M. and ISOZUMI, T. (2002, may). Design of Advanced Leg Module for Humanoid Robotics Project of METI. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Washington, DC.

KONNO, A. (2002, may). Design and Development of the Biped Prototype Robian. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Wasington, DC.

KUFFNER, J. J.; NISHIWAKI, K.; KAGAMI, S.; INABA, M. and INOUE, H. Motion Planning for Humanoid Robots. In *Proc. 11th Int'l Symp. of Robotics Research (ISRR 2003)*.

Matlab 2009. The MathWorks, Inc., 2010.

NAKANISHI, J.; MORIMOTO, J.; ENDOA, G.; CHENG, G. et al. (2004). Learning from demonstration and adaptation of biped locomotion. *Robotics and Autonomous Systems*, Elsevier.

NAKAOKA, S.; NAKAZAWA, A.; KANEHIRO, F.; KANEKO, K. (2004). Task Model of Lower Body Motion for a Biped Humanoid Robot to Imitate Human Dances. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*.

PARK, Va F. C.; BOBROW, J. E. and PLOEN, S. R. (1995). A Lie Group Formulation of Robot Dynamics. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 14, No. 6, pp. 609-618.

