

MODELACIÓN DISCRETA DE LA ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS NOMINALES, EL CASO DE COLOMBIA 2004 – 2013¹

Francisco Javier Hernández Caballero²

Universidad de la Costa, CUC, Colombia – Artículo Tipo 1.
Investigación Científica y Tecnológica – Recibido: 2 de Diciembre 2014 – Aceptado: 12 de Junio 2015
doi: <http://dx.doi.org/10.17981/econuc.36.1.2015.27>

RESUMEN

El estudio de las estructuras de tasas, desde una perspectiva teórica y empírica, siempre ha sido abordado con modelos en tiempos continuos. Esto puede ser explicado porque las primeras investigaciones al respecto, se dieron en mercados de capitales desarrollados. La funcionalidad de estas estructuras de tasas está dada por las expectativas económicas y financieras que refleja su dinámica; que se puede constatar con la interacción con variables como la inflación o la actividad económica de un país. Estas últimas, sin embargo se presentan con una dinámica discreta. En este trabajo se estimó para Colombia una estructura de tasas nominales en tiempo discreto, cuyo objetivo principal es encontrar bajo este contexto, la interacción teórica de las estructuras de tasas sobre ciertas expectativas económicas y financieras. Metodológicamente, la modelación se abordó con los típicos modelos afines que ofrece la literatura al respecto, en la versión dinámica y discreta propuesta por Alfaro(2011). Los resultados de la estimación permiten concluir que la modelación discreta con cotizaciones de tasas nominales de Títulos de Tesorería de Clase B, ajustan bastante bien y son un buen referente estadístico para contrastar las expectativas de inflación.

Palabras Clave:

Curvas de rendimiento, Modelos de ajustes, Expectativas de Inflación y Títulos de Tesorería –TES–.

JEL: G31, G32, P24

Si va a referenciar este artículo

Hernández, F. (2015). Modelación discreta de la estructura de tasas de interés nominales, el caso de Colombia 2004 – 2013, *Económicas CUC*, 36(1), 181-215.
doi: <http://dx.doi.org/10.17981/econuc.36.1.2015.27>

¹ Artículo de investigación, dentro de la línea de Economía Financiera, producto de la investigación sobre Teoría, Aplicación, Modelado y Funcionalidad de Las Estructuras de Tasas de Interés Nominales, que el autor viene desarrollando a partir de su trabajo de investigación con el cual se tituló como Magister en Economía Financiera en la Universidad de Santiago de Chile.

² Contador Público y Economista, Especialista en Finanzas y Magister en Economía Financiera. Docente investigador Universidad Simón Bolívar y Corporación Universitaria Americana. Barranquilla Colombia. fhernandez@unisimonbolivar.edu.co

INTRODUCCIÓN

Teórica y empíricamente, la construcción de modelos para ajustes de curvas de rendimiento o Estructuras de Tasas de Interés (ETTI), han girado en torno a dos expectativas. Primero en torno a lo económico, puesto que la dinámica expresada en su construcción implícitamente debe reflejar las expectativas que los agentes del mercado tienen sobre los títulos soberanos (Rojas, 2007), sobre los cuales recae o es instrumentada la política económica, como la monetaria y fiscal, del Estado que emite dichos títulos.

Segundo, en lo financiero, su funcionalidad se acentúa en la valoración de activos, evaluación de riesgos, diseño de estrategias de cobertura (Romero & Robles, 2003); referenciar el costo del dinero en función del tiempo (Cámaro, Henao & Mendez, 2005) y entre otros, ser referente para establecer rentabilidades en cualquier sector de los mercados de deuda: empresarial, bancaria, internacional o municipal y valoración de activos reales. (Marin & Rubio, 2011)

Atendiendo a las funcionalidades anteriores, con base en el trabajo de Alfaro (2011), en el presente documento se construyó la ETTI en forma discreta, tomando las cotizaciones de los títulos de tesorería clase B, emitidos por el Estado colombiano. A diferencia de trabajos similares como Melo & Castro (2010), quienes ajustan la curva en forma continua y la relacionan con variables dadas por el mercado como la inflación y la brecha del producto, en éste se contrasta con variables en expectativas.

En este trabajo, además de esta introducción, en la primera parte se enmarcan los referentes teóricos para la derivación de las curvas de rendimientos puntualizando los principales enfoques. En la segunda se describe la pertinencia de los

datos utilizados, en la tercera se hace la respectiva modelación de los datos, en forma econométrica y en la cuarta parte se expresan los principales resultados y conclusiones.

REFERENTE TEÓRICO

A través del tiempo, los economistas financieros percibieron que los rendimientos que exigían los títulos de renta fija, variaban en función del plazo al vencimiento (Dumrauf, 2015). Con esto, la ETTI o curvas de rendimiento son entendidas como la relación que existe entre el tiempo que falta hasta el vencimiento de los títulos de renta fija, y los rendimientos de estos mismos títulos. De hecho, los mismos economistas financieros interpretaron la funcionalidad inmersa en esta relación. Por lo tanto, la forma de modelar esta relación ha sido de gran interés para el quehacer de las finanzas.

Las investigaciones, teóricas y empíricas sobre la ETTI, en principio se centraron en encontrar los mejores ajustes en ausencia de arbitraje, y cuando al respecto hubo el suficiente consenso, los estudios se extendieron a la interacción entre la estructura de tasas y variables macroeconómicas y financieras.

Se han abordado desde escenarios paramétricos y no paramétricos, destacándose los de Nelson & Siegel (1987); Svensson (1995), Polinomios Trigonométricos y Locales, Splines³ Suavizados, Componentes Principales, Análisis Factorial, Redes Neuronales, entre otros.

Santana (2008), ofrece una completa revisión metodológica con la cual aproxima la curva de rendimiento a los mercados de Colombia y Estados Unidos. A su vez, Ro-

³ Curvas diferenciables definidas en porciones mediante polinomios.

mero & Robles (2003), hacen una revisión teórica y empírica, tanto de los métodos como de los modelos (enfoques macroeconómicos y financieros) con que se han abordado los estudios.

Normalmente, las estimaciones de las Estructuras de Tasas de Interés han sido ajustadas con modelos de factores⁴, o afines, de los cuales el de Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll, & Ross, (1985), son acotados a no presentar oportunidades de arbitraje y son generados en procesos estocásticos. (Alfaro, 2009)

Cox et al., (1985), derivan un modelo de un solo factor para describir la estructura temporal, el cual lo desarrollan en un contexto de modelación de valoración de activos en equilibrio general inter temporal.

Vasicek (1977), argumenta que bajo la ausencia de arbitraje, (entre otros supuestos) la tasa de rendimiento esperada para cualquier bono mayor que la tasa spot (Tipo de cambio que se aplica en las compras inmediatas de divisas), es proporcional a su desviación estándar.

El paradigma de mayor referencia lo constituye el modelo de ajuste de Nelson & Siegel (1987), quienes introducen un ajuste paramétrico, también en tiempo continuo, para determinar la curva de rendimientos. Sus argumentos, se basan en que las formas de estas curvas están asociadas a las soluciones de ecuaciones en diferencias y que la teoría de las

expectativas de la estructura de las tasas de interés, provee una *motivación heurística* para investigar tal sentido de ajuste. El modelo establece que las tasas forwards (futuras) presentan la siguiente forma:

$$(1) R(m) = \beta_0 + \beta_1 \frac{(1 - e^{-m/t})}{m/t} + \beta_2 \left[\frac{(1 - e^{-m/t})}{m/t} - e^{-m/t} \right]$$

Esta forma de extraer las curvas de rendimientos no es lineal, pero para efectos empíricos de contextualizar la modelación econométrica, se asume que el parámetro t se conoce. Así mismo, del modelo se desprende que estimaciones en las cuales se hace que la madurez sea larga, el rendimiento estaría dado por el factor β_0 y esto sería interpretado como la tasa larga. Estimaciones a corto plazo, m muy pequeño, la estructura se hace con los factores $\beta_0 + \beta_1$ que implicaría la tasa corta.

La popularidad y acogimiento institucional en muchos países, del modelo de Nelson & Siegel (1987), viene dada por lo parsimonioso o simple, y flexible que resulta para modelar cualquier forma de la curva de rendimiento.

Svensson (1995), presenta una extensión del modelo de Nelson & Siegel (1987), agregando un cuarto factor (β_3) semejante al tercero (β_2), con lo cual la tasas forward vendrían dadas por el siguiente modelo:

$$(2) R(m) = \beta_0 + \beta_1 \frac{(1 - e^{-m/t_1})}{m/t_1} + \beta_2 \left[\frac{(1 - e^{-m/t_1})}{m/t_1} - e^{-m/t_1} \right] + \beta_3 \left[\frac{(1 - e^{-m/t_2})}{m/t_2} - e^{-m/t_2} \right]$$

⁴ Básicamente esto implica obtener parámetros asociados al tiempo como variable, el cual es reemplazado al vencimiento que se desea estimar.

La presencia del cuarto factor (β_3) contribuye a tener un ajuste más refinado, sobre todo en los tramos de largo plazo, pues provee un efecto adicional y semejante al segundo factor. En algunos escenarios, cuando la estructura de tasas es más compleja, el modelo de Svensson, se desempeña mejor que el de Nelson & Siegel. (Santana, 2008)

Diebold & Li (2006), presentan una *re parametrización* del modelo de Nelson & Siegel (1987). Ofrecen una interpretación más moderna de los factores entendiéndolos como *factores dinámicos latentes*. Concluyen que lo que en la literatura se ha interpretado como estimaciones de largo, mediano y corto plazo, derivados de los límites estos mismos, también pueden ser interpretados en términos de nivel (level), pendiente (slope) y curvatura (curvature).

Otra caracterización importante que le dan Diebold & Li (2006), al modelo de Nelson- Siegel (1987), es la caracterización dinámica, en términos de econometría de series de tiempo, por lo cual se le conoce como *Nelson-Siegel Dinámico*. Christensen, Diebold, & Rudebusch (2010), encuentran que esta versión dinámica, en un contexto de no arbitraje pertenece a la clase de modelos afines o los típicos modelos de factores.

Teórica y empíricamente todos los modelos de ajustes de las curvas de rendimiento, se han basado en un escenario de tiempo continuo. Sin embargo, recientemente Alfaro (2011), propone una versión discreta del Nelson-Siegel Dinámico, y en este sentido, en paralelo con Christensen et al., (2010), demuestra que el modelo pertenece a la clase de modelos afines. Tras lo anterior, Alfaro (2011), apoyado con aproximaciones de Taylor deriva la versión discreta del mo-

delo Nelson-Siegel dinámico de la siguiente manera⁵:

$$(3) \quad R(m) = \beta_{0t} + \frac{\beta_{1t}}{m} \left[\frac{1 - \phi^m}{1 - \phi} \right] + \frac{\beta_{2t}}{m} \left[\left(\frac{1 - \phi^m}{1} \right) - m\phi^{m-1} \right]$$

Una de las ventajas teóricas y esperadas de esta versión, sobre todo por los propósitos del presente trabajo, es el poder trasladar el análisis de interacción con otras variables que no presentan un comportamiento continuo, a un escenario donde las variables estrían vis a vis⁶ en términos del comportamiento de frecuencias. Pueden analizarse series (económicas y/o financieras) con frecuencia mensual, o trimestral, según el caso, con una estructura de tasas derivadas en frecuencia mensual o trimestral, de nuevo, según el caso.

Mercado de TES y datos estilizados

Es natural construir la ETTI con bonos gubernamentales, que sólo se diferencien en el plazo de vencimiento. El uso de estos instrumentos es justificado porque i) no presentan riesgo de insolvencia, ii) tienen una alta liquidez y un gran volumen de negociación por lo que sus precios reflejan la información disponible en el mercado (Marin & Rubio, 2011), y iii) tienen un grado semejante de fiscalidad. (Mascareñas, 2013)

Con base en la teoría de derivación de curvas de rendimiento con títulos soberanos –

⁵ Para mayor detalle ver los siguientes documentos referenciados: Alfaro, Becerra, & Sagner, (2011) y Alfaro (2009)

⁶ Expresión española procedente del francés vis-à-vis, que significa 'cara a cara'.

deuda pública - por cumplir con el rol de activos libre de riesgo, de crédito – se trabajó con datos de las cotizaciones de tasa de los Títulos de Tesorería – TES - de Clase B, emitidos por el gobierno central colombiano, enmarcados en la ley 51 de 1990.

Según datos del Ministerio de Hacienda, la dinámica de estas emisiones de TES ha mantenido un crecimiento constante, pasando de 38,95% de la deuda total en diciembre de 2001, a 71,27% a julio de 2013. De igual manera, en la deuda interna pasó de 81,41% al 98,34% entre junio de 2001 y julio de 2013. En ambos casos, los TES tienen mayor participación en toda la dinámica.

De las diferentes formas de TES, las emitidas en pesos a tasa fija son las que siempre han tenido mayor representatividad, incluso también han tenido una dinámica creciente, pues, según información de deuda pública del Ministerio de Hacienda, han pasado de representar el 37,90% al 77,48% de junio de 2001 a julio de 2013.

En complemento a lo anterior, se trabajó con las cotizaciones de tasas de los TES de clase B, por, i) su importancia relativa tanto en la deuda total como interna, ii) los objetivos con los cuales fueron creados tienen mayor dinámica de emisión; es decir sus emisiones son más frecuentes respecto de los de clase A, que ya prácticamente no se emiten, iii) atendiendo a esas mismas características de creación, y por los plazos a los cuales se emiten, podría argüirse que también han sido creados para desarrollar el mercado de capitales en Colombia y dar señales de las expectativas de precios y tasas por plazos, lo que los hace ideales para la construcción de las curvas de rendimiento.

Para reforzar el porqué de la utilización de los TES de clase B, expresados en pesos y negociados a tasa cupón fija y no segregables, Reveiz & Leon (2008), con el fin de contar con un Benchmark⁷ para el mercado de deuda pública interna colombiano, ofrecen un índice representativo, describiendo los principales fundamentos y principios metodológicos reconocidos a nivel internacional, para la construcción de tales índices y los ajustan al contexto colombiano. En sujeción a lo anterior, Reveiz & Leon (2008), para la calibración del índice Benchmark, reportan la utilización exclusivamente de los TES de clase B, expresados en pesos, a tasa fija y negociados no en forma segregable.

Modelación econométrica

En este apartado se exponen dos escenarios, uno en donde se estima el modelo Nelson-Siegel Dinámico en la versión discreta propuesta por Alfaro (2011). En un segundo escenario se contrasta la interacción de la dinámica de la estructura de tasas con las expectativas de inflación y de actividad económica en Colombia.

Para la primera etapa, se trabajó con las tasas de cierre del último día hábil de cada mes. La tabla 1 muestra la participación de las diferentes tasas con las cuales se trabajó. Es pertinente anotar, que para los vencimientos más cortos, por ser plazos a cumplir muy próximos, por lo general presentan pocas transacciones y por ende pocas cotizaciones reales de tasas, por lo que algunos autores acuden a diferentes clases de títulos, tomando como tasas cortas las del mercado monetario.

⁷ En finanzas, referencia que se usa para hacer comparaciones.

Tabla 1.
Participación de los Diferentes Vencimientos

Plazos	Frecuencia	Porcentaje	Acumulado
0 a 3 vencimientos	61	3,40%	3,41
Más de 3 y menos de 6 Meses	74	4,10%	7,55
Más de 6 y Menos de 12 Meses	156	8,70%	16,28
Más de 12 y Menos de 24 Meses	290	16,20%	32,51
Más de 24 y Menos de 36 Meses	256	14,30%	46,84
Más de 36 y Menos de 60 Meses	314	17,60%	64,41
Más de 60 y Menos de 96 Meses	244	13,70%	78,06
Más de 96 y Menos de 120 Meses	137	7,70%	85,73
Más de 120 Meses	255	14,30%	100%
Total	1.787	100%	

Fuente: Elaboración propia con datos del Sistema Electrónico de Negociación (SEN) administrado por el Banco de la República

Estimación del modelo Nelson-Siegel dinámico en forma discreta

En el primer escenario el modelo de la ecuación 3 fue estimado en dos etapas. En la primera se estimó para cada periodo (mes), a través de mínimos cuadrados ordinarios mediante una grilla para el parámetro ϕ en un rango entre 0,70 hasta 0,99 con intervalos de 0,01. El propósito de esto es encontrar en ese rango el ϕ que, bajo la medida de ajuste global R^2 en el promedio de toda la muestra, optimice este R^2 . De la misma manera se promedió el error estándar para toda la muestra. Los resultados, presentados en las Figuras 1 y 2 evidencian que para el R^2 el ϕ que lo optimiza en promedio a lo largo de la muestra es 0,95 y para el error estándar es cuando el ϕ es igual a 0,93. Con estos resultados, se trabajó la segunda etapa con un ϕ intermedio de 0,94, el cual es idéntico al calibrado por Diebold & Li, (2006)⁸. Esto implica que teniendo un ϕ dado para la muestra, el modelo puede ser estimado por mínimos cuadrados ordinarios lineales.

⁸ Como quiera que se está trabajando con el modelo discreto de Alfaro (2011), con la respectiva transformación a tiempo continuo se estaría en armonía con Diebold & Li (2006) que calibran λ de 0,0609.

Las Figuras 3, 4 y 5 muestran la dinámica de los factores de la curva de rendimiento. Diebold & Li (2006), consideran como proxis empíricas de los factores, las siguientes combinaciones. El nivel como las tasas a largo plazo, es decir a 120 meses, asociado al tramo largo de la curva proponen la pendiente de la curva como la diferencia entre la tasa más corta y el nivel, siendo la tasa corta la estimación a 3 meses. Y definen la curvatura, asociada al tramo corto, como 2 veces la tasa a 24 meses, menos la tasa a 3 meses y menos la tasa a 120 meses.

Con la derivación de los factores de la curva de rendimiento, es pertinente evaluar qué tan bondadoso es el ajuste. En este sentido, se derivan tres curvas para tres periodos de la muestra, ubicando al principio, al medio y al final de toda la serie (Agosto 2004, Octubre 2008 y Junio 2012 respectivamente). Como vencimientos proyectamos los mismos para esos periodos y se comparan con las tasas reales para observar que tan bondadoso es el ajuste del modelo. Las Figuras 6, 7 y 8, evidencian que el modelo ajusta razonablemente bien la dinámica de las tasas futuras de vencimientos

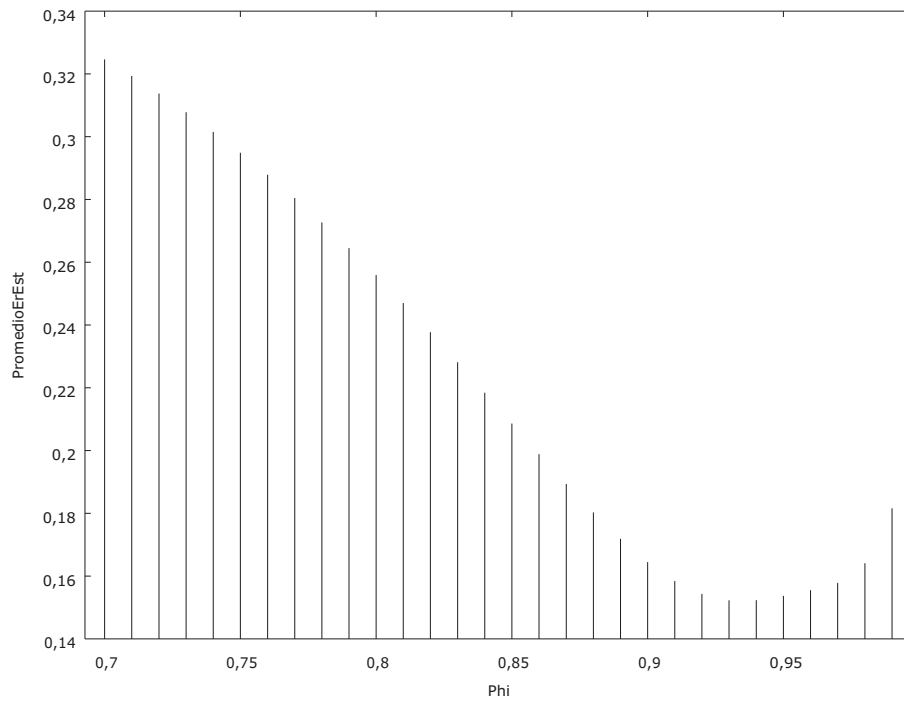


Figura 1. R^2 Versus el Phi

Fuente: Elaboración propia

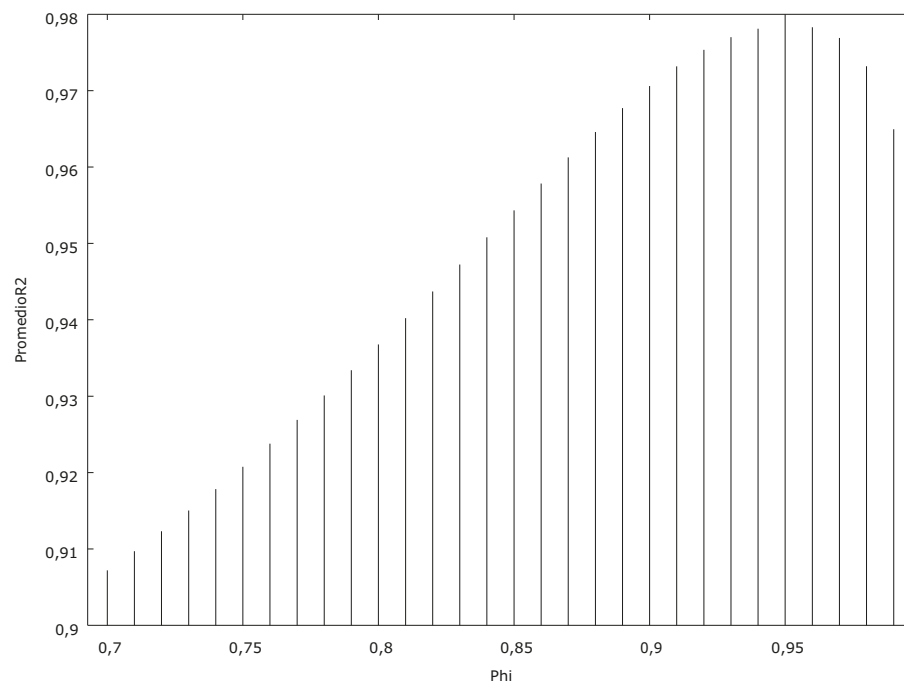


Figura 2. Error Estándar Versus el Phi

Fuente: Elaboración propia

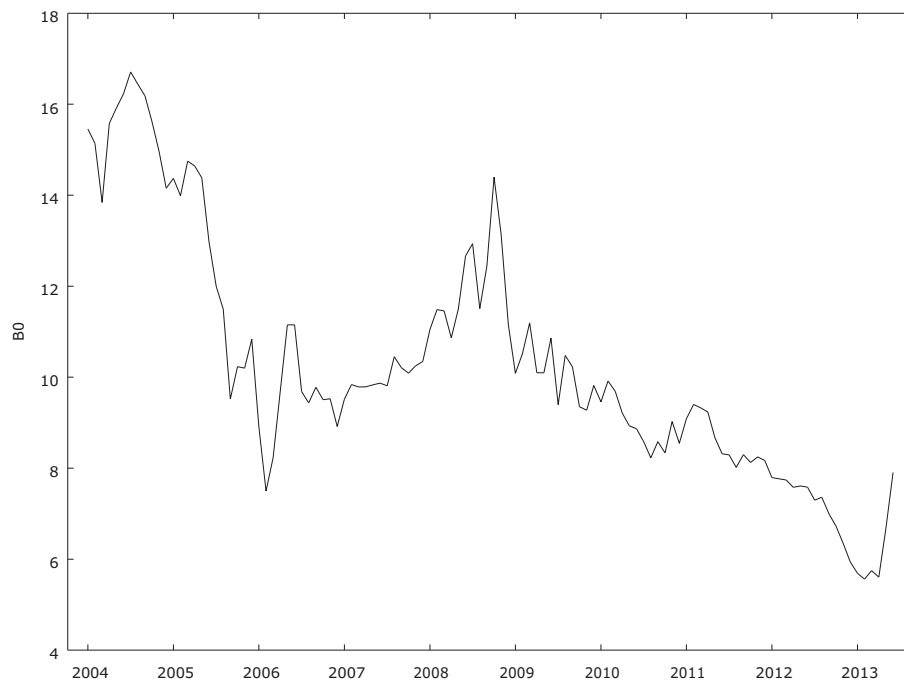


Figura 3. Nivel del Modelo

Fuente: Elaboración propia

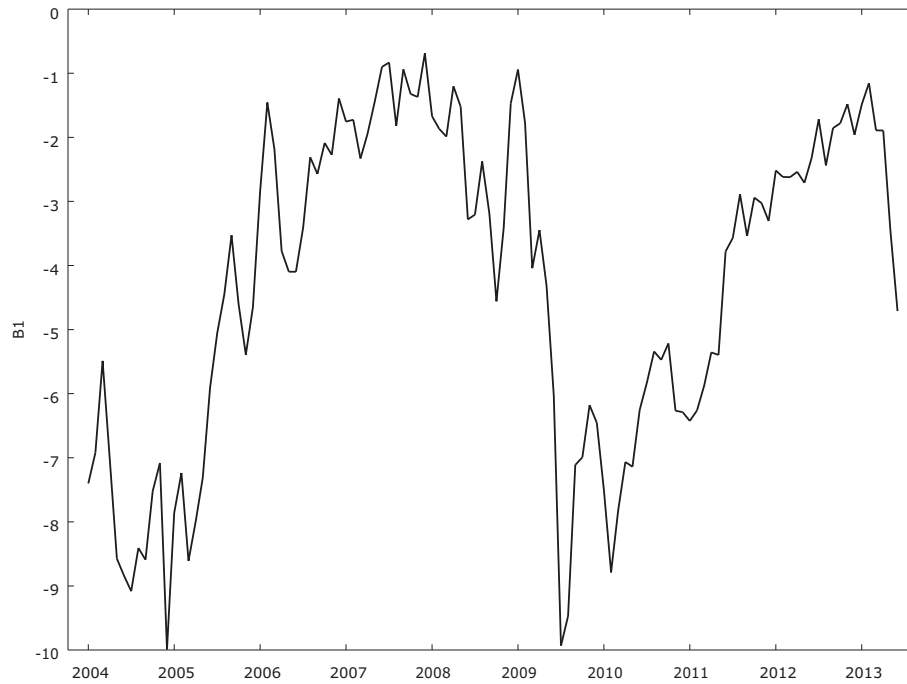


Figura 4. Pendiente del Modelo

Fuente: Elaboración propia

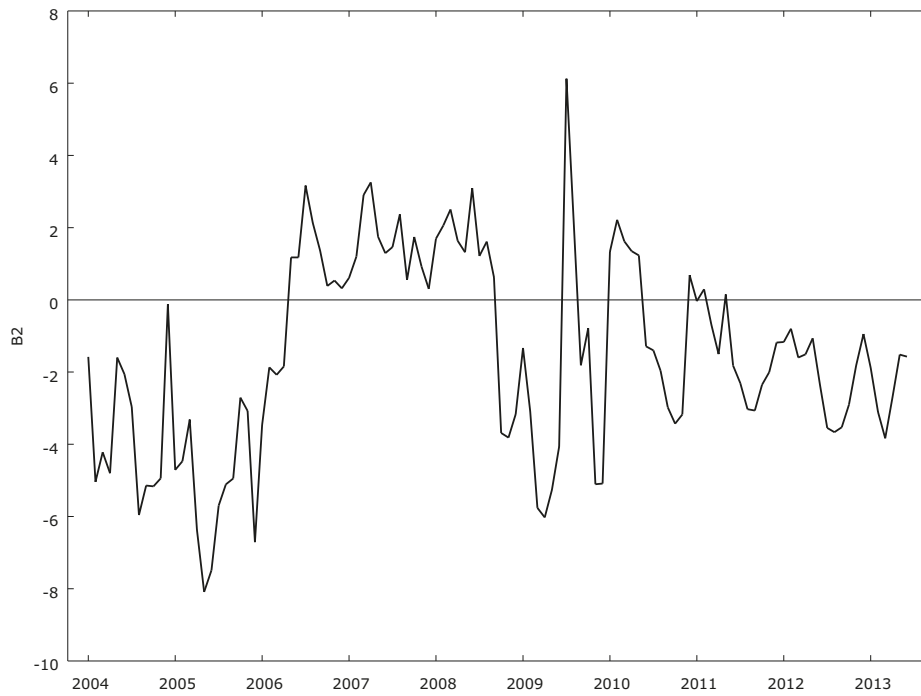


Figura 5. Curvatura del Modelo

Fuente: Elaboración propia

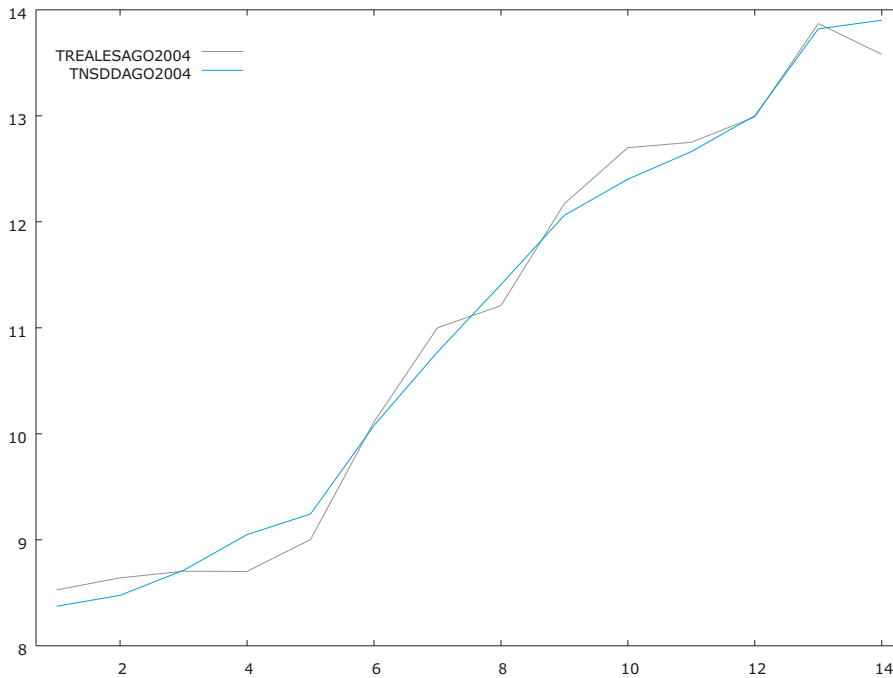


Figura 6. Curva de Rendimiento Modelada y Vencimientos Reales de Agosto de 2004

Fuente: Elaboración propia

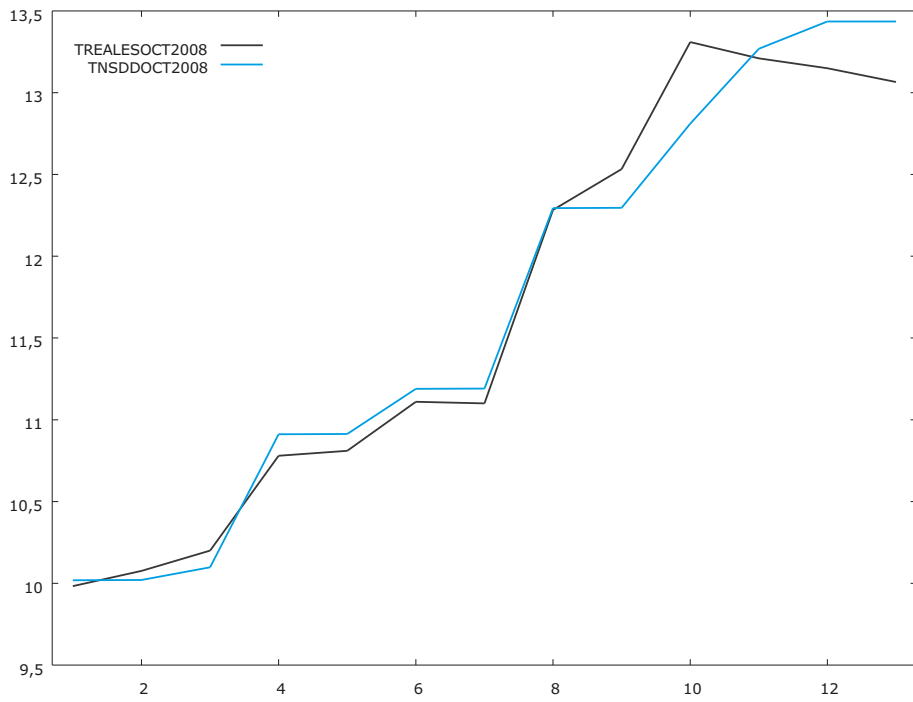


Figura 7. Curva de Rendimiento Modelada y Vencimientos Reales de Octubre de 2008

Fuente: Elaboración propia

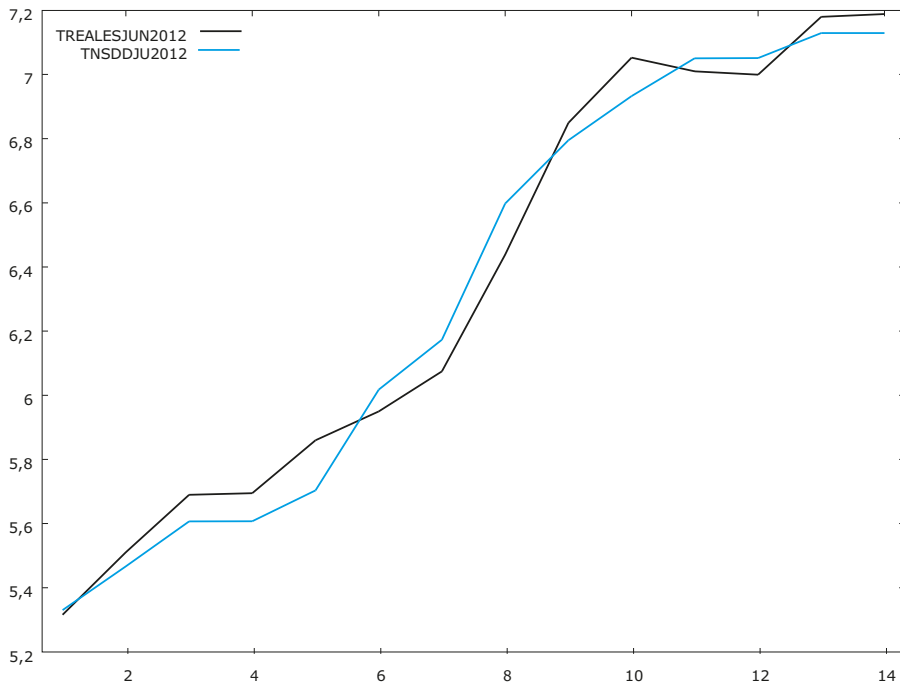


Figura 8. Curva de Rendimiento Modelada y Vencimientos Reales de Junio de 2012

Fuente: Elaboración propia

Estructura de tasas discretas y expectativas de inflación y actividad económica

En esta sección, básicamente se analiza la interacción entre la dinámica de los factores de la estructura de tasas, obtenidas anteriormente, y las expectativas de inflación y de actividad económica. Este análisis se aborda a través de estimaciones de tipo $VAT(p)$.

Desde un contexto esencialmente macroeconómico - por las variables que interactúan con la estructura de tasas. Diebold, Rudebusch & Aruoba (2006), estudian las relaciones entre el nivel con la inflación, y la pendiente con la brecha del producto. Rudebusch & Wu (2004), lo hacen entre el nivel y las expectativas de inflación y la pendiente con la tasa de política monetaria. Desde esta perspectiva, para este estudio de caso, las figuras 9 y

10 muestran el comportamiento entre el nivel y las expectativas de inflación a diciembre de cada año y entre la pendiente y las expectativas del Índice Mensual de Actividad Económica (IMACO).

En el Tabla 2, se muestran los detalles de las series utilizadas entre enero de 2004 a junio de 2013. Para efectos de los análisis de equilibrio, apoyados en el test de Phillips-Perron solo la curvatura (β_2) no presenta raíz unitaria, mientras que las demás, con el mismo test, muestran un p-valor superior a 0,10 dando indicios de presencia de raíz unitaria (Ver Anexo No 1), las cuales al ser diferenciadas presentan un p-valor nulo, por lo que para efectos de predicción podrían ser tratadas $I(1)$. Sin embargo, atendiendo a que lo se busca es observar la estructura de relación, por las razones que se argumentan más adelante, las variables serán modeladas en el VAR en su estado natural.

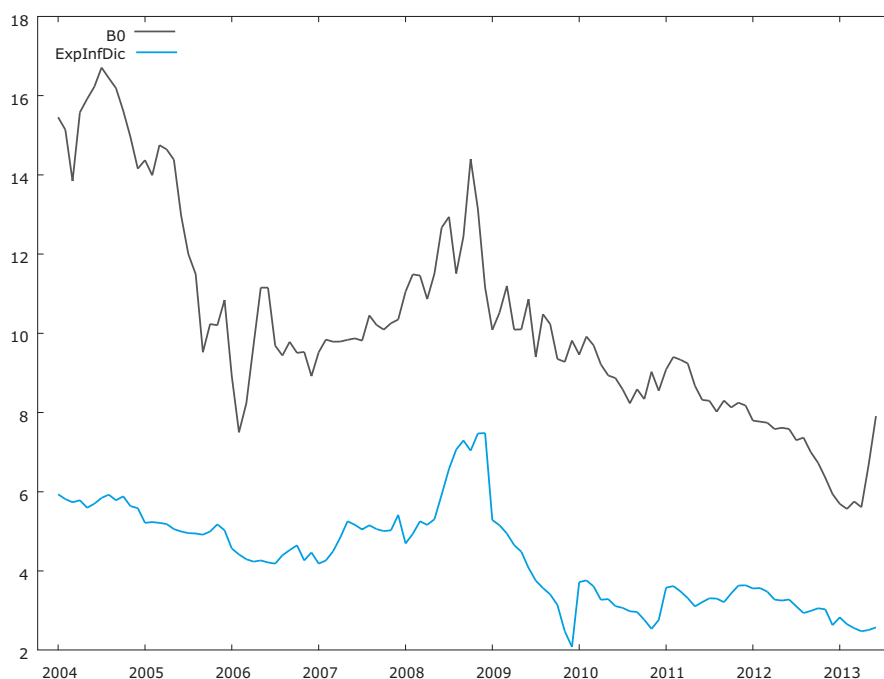


Figura 9. Nivel Versus Expectativas de Inflación a diciembre

Fuente: Elaboración propia

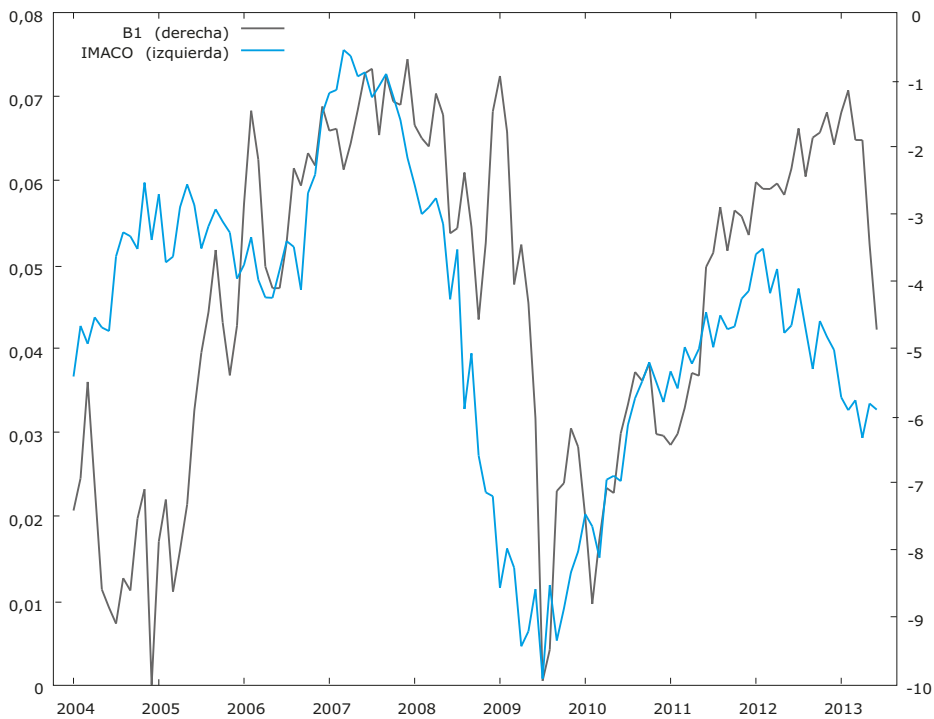


Figura 10. Pendiente Versus IMACO

Fuente: Elaboración propia

Tabla 2.
Series Utilizadas

Serie	Descripción	Fuente
B0	Nivel de la Curva de Rendimiento	Elaboración Propia
B1	Pendiente de la Curva de Rendimiento	Elaboración Propia
EXPINF DIC	Expectativas de Inflación a Diciembre	Banco de la República de Colombia
IMACO	Índice Mensual de Actividad Económica	Banco de la República de Colombia

Fuente: Elaboración Propia

Estimación del vector autorregresivo

Teniendo en cuenta que en la literatura sobre las modelaciones clásicos o puros, todas las variables dependen de todas, por lo tanto todas son modeladas endógenamente, además, atendiendo a que los estudios de las series de tiempo, interpretan que los proponentes de las metodologías sugieren que no es necesario diferenciar, restar tendencias o desestacionalizar las series, pues el objetivo primordial es descubrir las relaciones entre variables, más

que estimaciones precisas de parámetros⁹; las series fueron modeladas en sus niveles naturales de obtención.

En armonía con lo anterior, se plantea un VAR (p) de la forma:

$$X_t = C + \sum_{i=1}^p \theta_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

⁹ Ver por ejemplo Montenegro (2011) y Pérez (2006)

Tabla 3.
Criterios de Elección de Rezagos

Rezago	Log(L)	P (RV)	AIC	BIC	HQC
1	164,36626		-2,673449	-2,176758*	-2,472059
2	190,53412	0,00001	-2,863595	-1,969551	-2,501093*
3	204,21914	0,03963	-2,818873	-1,527476	-2,295259
4	221,34788	0,00502	-2,839776	-1,151026	-2,155049
5	234,41482	0,05217	9,237174	-0,699358	-1,939621
6	255,63692	0,00034	-2,882165*	-0,39871	-1,875214

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.
Vector Autorregresivo

Variable	B0	B1	EXPINFDC	IMACO
B0(-1)	0.897182	-0.273412	0.121515	0.000515
	(0.08076)	(0.10618)	(0.03600)	(0.00054)
	[11.1090]	[-2.57505]	[3.37548]	[0.96130]
B1(-1)	-0.036208	0.761408	0.062338	-0.000185
	(0.05523)	(0.07261)	(0.02462)	(0.00037)
	[-0.65557]	[10.4860]	[2.53211]	[-0.50636]
EXPINFDC(-1)	0.141125	0.300277	0.741852	-0.001397
	(0.13235)	(0.17400)	(0.05899)	(0.00088)
	[1.06630]	[1.72572]	[12.5749]	[-1.59184]
IMACO(-1)	4.754401	12.76913	2.620144	0.997424
	(4.38456)	(5.76440)	(1.95441)	(0.02907)
	[1.08435]	[2.21517]	[1.34063]	[34.3132]

Fuente: Elaboración propia

Donde $X_t' = [\beta_{0t}, \beta_{1t}, EXPINFDC_t, IMACO_t]$ y se asume que el vector de errores esta independiente e idénticamente distribuido. El orden del VAR acorde al criterio Bayesiano de Schwarz¹⁰ podría ser estimado a un rezago, (Ver tabla 3). Con lo cual el vector se reescribirá así:

$$X_t' = [\beta_{0t-1}, \beta_{1t-1}, \beta_{2t-1}, EXPINFDC_{t-1}, IMACO_{t-1}]$$

¹⁰ El hecho de que se atienda este criterio para modelar los rezagos del VAR obedece solo a la conveniencia de no sobre parametrizar el modelo.

Los resultados de la anterior modelación VAR se muestran en la tabla 4 donde se evidencia que tanto las tasas de largo plazo como las expectativas de actividad económica, presentan un comportamiento exógeno al modelo, donde solo dependen significativamente de ellas mismas. Por su parte, la curvatura y las expectativas de inflación son bastante endógenas, en el sentido de que en términos estadísticos son significativamente explicadas por el modelo.

La pendiente, que en términos de Alfaro (2009), puede ser interpretada como premio por plazo, y de alguna manera observa las tasas de mediano plazo, son determinadas estadísticamente por el contexto de las expectativas, y negativamente por las tasas de largo plazo. A su vez las expectativas de inflación a diciembre de cada año, son influenciadas significativamente tanto por las tasas de largo como de mediano plazo.

En el Anexo No 2, el gráfico de las raíces inversas, da cuenta de la estabilidad del modelo, pues los puntos se encuentran dentro del círculo unitario.

Identificación del VAR: (funciones de impulso respuesta)

Como quiera que la identificación en un modelo VAR se realiza mediante la ortogonalización de las perturbaciones aleatorias, transformando el modelo de manera que la matriz de varianzas covarianzas resultante sea diagonal (Perez, 2006), con esto el orden de las variables es de suma importancia para la identificación de los shocks, teniendo que ordenar las series de mayor a menor exogeneidad relativa. Pero la identificación de los shocks, mediante los impulsos generalizados técnicamente no exige la ortogonalización de los shocks ni ordenar las series respecto a su exogeneidad.

Se evidencia como las perturbaciones del nivel de la curva, afectan en forma ascendente, permanente y casi que de inmediato tanto a las desviaciones de las expectativas de inflación como a las de la actividad económica. A su vez los shocks de la pendiente se presentan después de tres períodos y en forma negativa sin mayor impacto sobre las desviaciones de ambas expectativas. Ver figura 11.

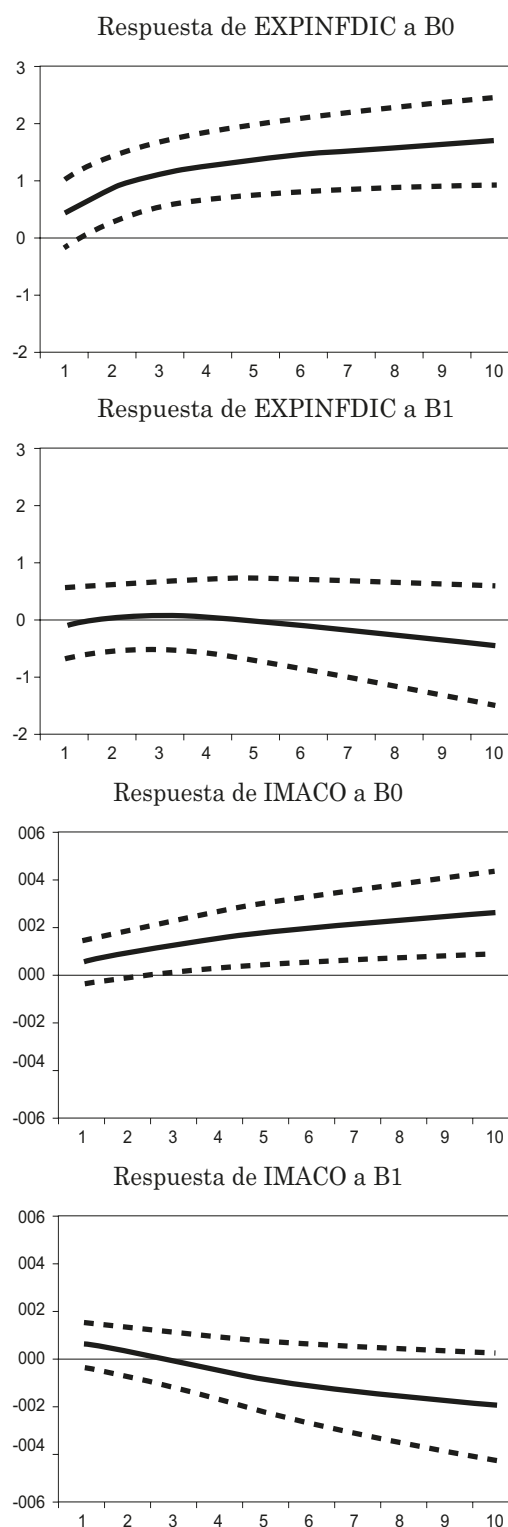


Figura 11. Respuesta de las Expectativas ante Desviaciones de las Tasas de Interés

Fuente: Elaboración propia

CONCLUSIONES

En este trabajo, se estimó la estructura de tasas explotando las propiedades de las series de tiempo, en un contexto discreto (mensualmente) a partir de los Títulos de Tesorería de clase B, evidenciando que en Colombia existe en el mercado de deuda pública la suficiente liquidez para ajustar dichas curvas, bajo este escenario discreto.

En el escenario de los típicos modelos afines o de factores, los resultados del ajuste de la estructura de tasas son similares a los obtenidos por Diebold & Li (2006). Al acotar el parámetro que impone la no linealidad [ϕ en este trabajo y λ para Diebold & Li (2006)] a un valor fijo para calibrar el modelo en forma lineal por mínimos cuadrados ordinarios, los resultados son muy similares. Así mismo, la estimación de vencimientos para tres periodos de la muestra, permite observar que el modelo se ajusta razonablemente bien a la dinámica real de las tasas.

El escenario del vector autorregresivo, permite inferir que las expectativas de inflación son más explicadas por los factores de las curvas de rendimiento, en donde las tasas de largo plazo tienen más peso que las de corto. Respecto al impacto de las perturbaciones de los factores de la curva de rendimiento, se evidencia que tienen efectos inmediatos, ascendentes y sostenidos sobre las desviaciones de las expectativas de inflación. Mientras que los shocks de la pendiente se manifiestan tres periodos después, en forma negativa y sin mayor impacto sobre las desviaciones de ambas expectativas.

REFERENCIAS

- Alfaro, R. (2009). *La Curva de Rendimiento bajo Nelson Siegel*. Recuperado de: <http://www.bcentral.cl/estudios/documentos-trabajo/pdf/dtbc531.pdf>
- Alfaro, R. (2011). Affine Nelson–Siegel Model. *Economics Letters*, 110(1), 1–3. doi: 10.1016/j.econlet.2010.10.003
- Alfaro, R., Becerra, S. & Sagner, A. (2011). Estimación de la estructura de tasas nominales de Chile: aplicación del modelo dinámico Nelson-Siegel. *Economía Chilena*, 14(3), 57–74.
- Cámaro, A., Henao, A. & Mendez, E. (2005). Movimientos de la Curva de Rendimientos de TES Tasa Fija en Colombia. *Innovar*, 15(26), 122–133.
- Christensen, J. H. E., Diebold, F. X., & Rudebusch, G. D. (2010). *The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models*. Recuperado de: <http://www.frbsf.org/economic-research/files/wp07-20bk.pdf>
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 385–408. doi: 10.2307/1911242
- Diebold, F. X. & Li, C. (2006). Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. *Journal of Econometrics*, 130(2), 337–364. doi: 10.1016/j.jeconom.2005.03.005
- Diebold, F. X., Rudebusch, G. D., & Aruoba, S. B. (2006). The Macroeconomy and the Yield Curve: a Dynamic Latent Factor Approach. *Journal of Econometrics*, 131(1-2), 309–338. doi: 10.1016/j.jeconom.2005.01.011
- Dumrauf, G. L. (2015). *Análisis cuantitativo de bonos*. Argentina: Alfaomega. Recuperado de: http://libroweb.alfaomega.com.mx/catalogo/analisis_cuantitativo_bonos/libreacceso
- Marin, J. & Rubio, G. (2011). *La Estructura Temporal de los Tipos de Interés en un Contexto de Ausencia de arbitraje*. Recuperado de: <https://books.google.com.co/books?id=tmZXGX40fZsC&pg=PA61&lpg=PA61&dq=La>

- +Estructura+Temporal+de+los+Tipos+de+Interes+en+un+Contexto+de+Ausencia+de+arbitraje&source=bl&ots=pdePkjDef7&sig=6Y6HaLoLR_8exquQEtv3CSH3k2g&hl=es-419&sa=X&ei=apKVVZznLMaXNpXxrvAF&ved=0CBwQ6AEwAA#v=onepage&q=La%20Estructura%20Temporal%20de%20los%20Tipos%20de%20Interes%20en%20un%20Contexto%20de%20Ausencia%20de%20arbitraje&f=false
- Mascareñas, J. (2013). La Estructura Temporal de los Tipos de Interés. Recuperado de: <http://pendientedemigracion.ucm.es/info/jmas/mon/07.pdf>
- Melo, L. & Castro, G. (2010). Relación Entre Variables Macro y la Curva de Rendimientos. *Borradores de Economía*, 605, 2-28. Recuperado de: <http://www.banrep.gov.co/sites/default/files/publicaciones/pdfs/borra605.pdf>
- Montenegro, A. (2011). *Modelos Estacionarios Multivariados*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional.
- Nelson, C. R. & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business*, 60(4), 473-489.
- Perez, C. (2006). *Econometría de las Series Temporales*. Barcelona, España: P. P. Hall, Ed
- Reveiz, A. & Leon, C. (2008). Índice representativo del mercado de deuda pública interna: INXTES. *Borradores de Economía*, 488, 1–26. Recuperado de: <http://www.banrep.gov.co/docum/ftp/borra488.pdf>
- Rojas, J. C. (2007). *La curva de rendimientos como predictor de expectativas macroeconómicas*. Bogotá: Serie Documentos Borradores de Investigación Universidad del Rosario, (93), 1–14.
- Romero, P. A. & Robles, M. D. F. (2003). Estructura temporal de los tipos de intereses: teoría y evidencia empírica, *Revista Asturiana de Economía*, 27, 7–47.
- Rudebusch, G. D. & Wu, T. (2004). *A Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy and the Economy*. Recuperado de: <http://www.frbsf.org/economic-research/files/wp03-17bk.pdf>
- Santana, J. (2008). La Curva de Rendimientos: una Revisión Metodológica y nuevas Aproximaciones de Estimación. *Cuadernos de Economía*, 27(48), 73–113.
- Svensson, L. O. (1995). Estimating and Interpreting Forward Interest Rates Sweden 1992-1994. *Sveriges Riksbank Quarterly Review*, 3, 13-26. doi: 10.3386/w4871
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177–188. doi:10.1016/0304-405X(77)90016-2

ANEXOS

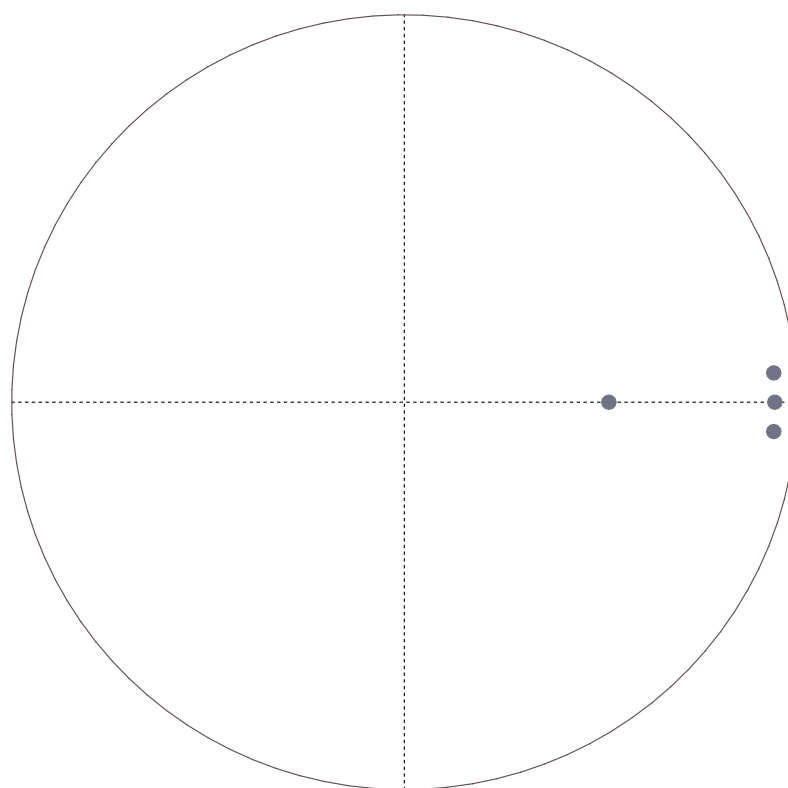
Anexo 1.

Test de Raiz Unitaria

Series	ADF		zPhillips-Perron		KPSS (1%=0,739-5%=0,463 - 10%=0,347%)
	t-statistic	p-value	t-statistic	p-value	t-statistic
B0	-2,004833	0,2845	-1,9441	0,3112	0,873712
B1	-2,470911	0,1253	-2,23038	0,1968	0,215215
B2	-4,059242	0,0017	-4,065934	0,0016	0,230685
EXPINFDIC	-1,463342	0,5486	-1,612206	0,4731	0,792083
IMACO	-2,83494	0,0568	-1,557657	0,5009	0,367047

Fuente: Elaboración Propia

raíces inversas del VAR en relación al círculo unidad



Anexo 2. *Grafico de las Raíces Inversas del VAR*

Fuente: Elaboración Propia

A DISCRETE MODELING OF THE STRUCTURE OF NOMINAL INTEREST RATES, COLOMBIA'S CASE 2004 – 2013¹

Francisco Javier Hernández Caballero²

Corporación Universidad de la Costa, CUC, Colombia – Article Type 1.
Scientific and Technological Research - Received: May 25th 2015 – Accepted: June 12th 2015
doi: <http://dx.doi.org/10.17981/econcuc.36.1.2015.27>

ABSTRACT

The study of the rate structures, from a theoretical and empirical perspective, has always been addressed with models in a continuous-time limit. This situation can be explained because the first researches were conducted in developed capital markets. The functionality of these rate structures derive from the economic and financial expectations that reflect its own dynamic; which is verifiable with the interaction of variables such as the inflation or the financial activity of a country. Nevertheless, the last ones are presented with a discrete dynamic. In this paper, it was estimated a structure of nominal interest rate in a discrete-time for Colombia whose main goal is to find, in this context, the theoretical interaction of the rate structure regarding certain expectations in the field of economy and finances. Methodologically, the modeling was dealt with the typical models offered by the related literature, in the dynamic version as well as the discrete one proposed by Alfaro (2011). The results obtained lead to the conclusion that the discrete modeling with the contribution of nominal rates of Treasury Bonds, Class B, are well suited and stand as a good estadistical reference to contrast the outlooks of inflation.

Keywords:

Yield Curves, Models of Adjustment, Expectations of Inflation and Treasury Bonds –TB-

JEL: G31, G32, P24

If you need to reference this article

Hernández, F. (2015). A discrete modeling of the structure of nominal interest rates, Colombia's case 2004–2013, *Económicas CUC*, 36(1), 181-215. doi: <http://dx.doi.org/10.17981/econcuc.36.1.2015.27>

¹ Scientific research article, with in the line of Financial Economics, product research Theory, Application, Modeling and functionality structures nominal interest rates.

² Public Accountant and economist specializing in Finance and Master in Financial Economics. Researcher teacher Universidad Simon Bolivar and Corporación Universitaria Americana. Barranquilla, Colombia. fhernandez@unisimonbolivar.edu.co

INTRODUCTION

From a theoretical and empirical perspective, the construction of models that allow the adjustment of yield curves or Term Structure of Interest Rates (TSIR), has been focused in two expectations. First, the economical aspect which dynamic expressed in its construction, implicitly, has to reflect the expectations of the market agents in terms of sovereign bonds (Rojas, 2007), that hold the economic policy as well as the monetary and the fiscal ones of the State that issues those bonds.

Second, in the financial aspect, its functionality is increased in regard to the value of bonds, evaluation of risks, design of strategies of covering (Romero & Robles, 2003). This way is possible to reference the cost of money depending on time (Cámaro, Henao & Mendez, 2005) among others, in order to establish profitabilities in any field of the debt markets whether business, financial, international or local and the valuation of real assets. (Marin & Rubio, 2011)

Based on the previous facts, Alfaro's paper especially (2011), in this document was built the TSIR in a discrete-way, taking in consideration the contributions of the treasury bonds class B, asset by the colombian State. In contrast to similar works such as Melo & Castro (2010), who adjust the curves in a continuous way and make the connection with some variables given for the market such as: inflation, and the gap of the product which is contrasted with variables of expectations.

In this paper, besides the present introduction, in the first part is framed the theoretical referents for the derivation of the yield curves focusing on the

main approaches. In the second one, it is described the suitability of the data that was used; meanwhile in the third one, the modeling of the data is done taking in consideration the econometric; finally, in the fourth part, the main results and conclusions are expressed.

THEORETICAL FRAMEWORK

Across the time, the financial economists perceived that the efficiency required for the titles of fixed income, were changing depending on the term to the maturity (Dumrauf, 2015). This way, the TSIR or yield curves are understood as the relation that exists between the time that is remaining to the maturity of the bonds of fixed income, and the yield of the same bonds. In fact, the same financial economists interpreted the functionality immersed in this relation. Therefore, the way of modeling this relation has been of great interest for the finances.

The investigations, theoretical and empirical on the TSIR, at first focused on finding the best adjustments in absence of arbitrage, and more about when the sufficient consensus was reached, state the interaction between the structure of rates and macroeconomic and financial variables.

It has been addressed from parametrics and non parametrics settings, particularly, those that were exposed by Nelson and Siegel (1987); Svensson (1995), Trigonometrical and Local Polynomials, Splines³ Softened, Main Components, Factor Analysis, Neural Networks, among others. Santana (2008), offers a complete methodological review

³ Smooth curve defined in portions by polynomials.

which approximates the yield curve to the markets of Colombia and The United States. In turn, Romero & Robles (2003) do a theoretical and empirical review of the methods as well as the models (macroeconomic and financial approaches) in which the studies have been addressed.

Normally, the estimations of the Structures of Interest Rates have been adjusted with models of factors⁴, or related issues. From these papers, is worthy of mention Vasicek (1977) & Cox, Ingersoll, & Ross, (1985), who are encouraged not to present opportunities of arbitrage and they are generated in stochastic processes (Alfaro, 2009)

Cox et al., (1985), derives a model that depends on a single factor to describe the temporary structure, which is developed in the context of a capital asset pricing model in a intertemporal general balance.

Vasicek (1977), argues that under the lack of arbitrage, (among other suppositions) the rate of return waited for any major bond than the rate spot (Type of change that is applied in the immediate purchases of currencies), is proportional to its standard deviation.

The paradigm of major reference is constituted by the adjustment model by Nelson and Siegel (1987), who introduce a parametric adjustment, also in continuous time, to determine the yield curve.

Their arguments are based on the fact that the forms of these curves are associated with the solutions of equations in differences. But also, the theory of the expectations of the structure of interest rates, provide a *heuristic motivation* to investigate such a sense of adjustment. The model establishes that the forward rates (future ones) present the following form:

$$(1) R(m) = \beta_0 + \beta_1 \frac{(1 - e^{-m/t})}{m/t} + \beta_2 \left[\frac{(1 - e^{-m/t})}{m/t} - e^{-m/t} \right]$$

This way of extracting the yield curves is non-linear, but for empirical effects of contextualizing the econometric modeling, it is assumed that the parameter t is known. Likewise, from the model it is clear that estimations in which the maturity is long, the yield would be given by the factor β_0 and this would be interpreted as the long-term rate. Short-term estimates, m very small, the structure is made with the factors $\beta_0 + \beta_1$, that imply the short-term rate.

The popularity and institutional care in many countries of Nelson and Siegel model (1987), is brought to the flexible, simple and parsimonious way to represent any shape of the yield curve.

Svensson (1995), introduces an extension of the model presented by Nelson & Siegel (1987), adding a fourth factor (β_3) similar to the third one (β_2), thus, the forwards rates would come by the following model:

$$(2) R(m) = \beta_0 + \beta_1 \frac{(1 - e^{-m/t_1})}{m/t_1} + \beta_2 \left[\frac{(1 - e^{-m/t_1})}{m/t_1} - e^{-m/t_1} \right] + \beta_3 \left[\frac{(1 - e^{-m/t_2})}{m/t_2} - e^{-m/t_2} \right]$$

⁴ Basically this involves getting associated parameters such as the time variable, which is replaced at maturity desired estimate.

The presence of the fourth factor (β_3) contributes to have a more refined adjustment, especially in the sections of long term, since it provides an additional effect, similar to the second factor. In some scenarios, when the structure of rates is more complex, the model of Svensson, it works better than Nelson and Siegel (Santana, 2008)

Diebold & Li (2006), develop a *reconstituted* of the model by Nelson & Siegel (1987). They offer a more modern interpretation of the factors understanding them as *dynamic latent factors*. They conclude that, what in the literature has been interpreted as estimations of long, medium and short term, derived from the limits, they can be interpreted as the level, slope and curvature.

Another important characterization provided by Diebold and Li (2006) to Nelson – Siegel model (1987) is the dynamic characterization, in terms of time series econometrics, such that he is known as *Dynamic Nelson-Siegel model*. Christensen, Diebold, & Rudebusch (2010), find that this dynamic version, in a context of no arbitrage belongs to the class of related models or the typical model of factors.

Theoretically and empirically all the models of the yield curve adjustments have been based on a scenario of constant time. However, Alfaro (2011), has recently proposed a discrete version of the Nelson-Siegel Dynamic model, and accordingly, along with Christensen et to (2010), it demonstrates that the model belongs to the class of related models. As a result, Alfaro (2011) based on Taylor's approximations derives the discrete version of the Nelson-Siegel dynamic model in the following way⁵:

$$(3) R(m) = \beta_{0t} + \frac{\beta_{1t}}{m} \left[\frac{1 - \phi^m}{1 - \phi} \right] + \frac{\beta_{2t}}{m} \left[\left(\frac{1 - \phi^m}{1} \right) - m\phi^{m-1} \right]$$

One of the theoretical advantages most expected from this version, especially for the intentions of the present paper, is to be able to move the analysis of interaction with other variables that do not present a constant behavior to a scene where the variables would be vis to vis⁶ in terms of the behavior of frequencies. There can be analyzed series (economic and/or financial) often monthly, or quarterly, according to the case, by a structure of rates derived in monthly or quarterly frequency, again, according to the case.

TES and stylized market data

It is natural to build the CMTs rates with government bonds, which only differ in the deadline. The use of these instruments is justified because i) they do not present risk of insolvency, ii) they have high liquidity and a large volume of trading by what their prices reflect the information available in the market (Marin & Rubio, 2011), and iii) they contain a similar level of taxation. (Mascareñas, 2013)

Based on the theory of the derivation of yield curves with titles sovereign - debt - to fulfill the role of assets free of risk and credit - it was worked with data coming from contributions rate of Treasury Bonds class B – TES, issued by the colombian central government, under the 1990 Act 51.

According to data supplied by the Ministry of finance, the dynamics of these emissions of TES it has kept a steady growth, from 38,95% of the total debt in December 2001, to 71,27% until July 2013.

⁵ For further information: Alfaro, Becerra, & Sagner, (2011) y Alfaro (2009)

⁶ Spanish expression coming from French vis-à-vis, which means 'face to face'.

Table 1.
Activity of different maturities

Time Frames	Frequency	Average	Cummulative
0 to 3 maturities	61	3,40%	3,41
More than 3 less than 6 months	74	4,10%	7,55
More than 6 less than 12 months	156	8,70%	16,28
More than 12 less than 24 months	290	16,20%	32,51
More than 24 less than 36 months	256	14,30%	46,84
More than 36 less than 60 months	314	17,60%	64,41
More than 60 less than 96 months	244	13,70%	78,06
More than 96 less than 120 months	137	7,70%	85,73
More than 120 months	255	14,30%	100%
Total	1.787	100%	

Data taken from Sistema Electronico de Negociacion (SEN) administrated by Banco de la República

Similarly, the domestic debt went from 81,41% to 98,34% between June 2001 and July 2013. In both cases, the TES have greater participation in all the dynamic.

As a result of the different forms of TES, those which are issued in pesos at fixed rate bonds are being provided with greater representativity. They have even had a growing dynamic. According to information related to public debt given by the Ministry of finance, they have passed from 37,90% to 77,48% from June 2001 to July 2013.

Additionally, it was used the contribution rate of TES B, by i) its importance in the intern and total debt, ii) the objectives that have more dynamic of emission; it is more frequent than A, which is almost non-existent, iii) taking into account the same characteristics of creation, and the gaps between each one, it could be said that they has been created to foster the capital market of Colombia and predict prices & rate installments, ideal for the creation of yield curves.

To reaffirm the use of the TES B in pesos negotiated in a fixed rate coupon and non-strippable, Reveiz & Leon (2008), in order

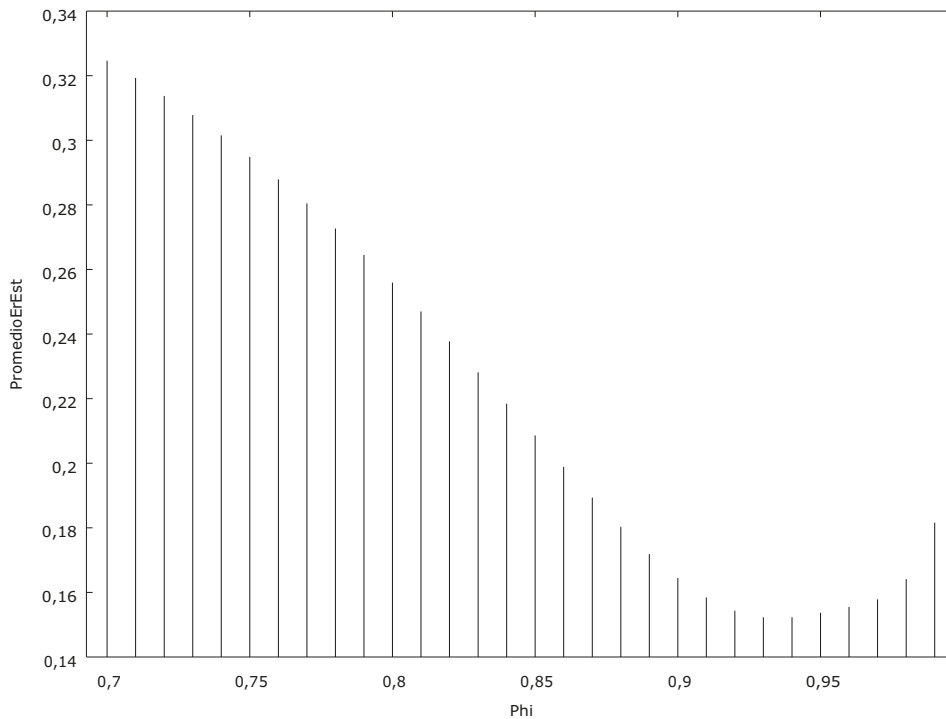
to use a Benchmark⁷ for the intern public debt of Colombian market; it is offered an index. It describes the international fundamentals and methodological principles to build scales that adapt to Colombian context. Consequently, to calibrate the benchmark index, it is exclusively used TES B in pesos negotiated in a fixed rate and non-strippable (Reveiz & Leon, 2008).

Econometric Model

In this section is presented two scenarios, one estimating the Dynamic Nelson Siegel proposed by Alfaro (2011) and the other contrasting the dynamic rate structures to inflation predictions and the economic activity of Colombia

Firstly, it has been used the closing rates taken the last day of each month. Table 1 shows the activity of the different rates used in this paper. However, short-dated maturities present less transaction; few rate quotes, so that, some authors may use different kind of titles or taking as short rates quotes the money market.

⁷ In finances, reference that is used to compare.

Figura 1. R^2 Versus el Phi

Own development source

Discreetestimation of Nelson-Siegel dynamic model

In the first scenario, the model of the third equation was estimated in two sections. First of all, it was valued for each period (month) through minimal ordinary squares chart to the parameter ϕ in a range of 0,70 to 0,99 in intervals of 0,01. The main objective is to find in the gap the ϕ , so that under the global adjustment R^2 could be optimized the same R^2 . In the same manner, it has been calculated the standard error for all the collected data. Figure 1 and 2 shows that ϕ improves the average results in 0,95 for R^2 , in the other hand for the standard error 0,93 is equal to ϕ . Using this results, the second section was developed with ϕ intermediate of 0,94, which is identical to Diebold & li (2006)⁸

⁸ Even though it is working with the discrete model Alfaro (2011), with the respective transformation to continuous time we would be in harmony with Diebold & Li (2006) gauging λ of 0.0609.

calibration. All of the above implies that, taking into account ϕ for the data collected, the model can be projected by minimal ordinary lineal squares.

Figures 3, 4 and 5 describe the activity of factors of the yield curve. Diebold & Li (2006) consider as proxy empiric factors the following combinations. The rank such as long-dated maturities, to 120 months, linked to long sections of the curve proposes the slope of the yield curve as the difference between the lowest rate and rank, twice the rate to 24 months, less than the 3 month rate and less than the 120 month rate.

It is accurate to assess the derivations of the yield curve and how pertinent they are. In this way, three different curves have derivated to three different periods of the collected data (August 2004, October 2008 and June 2012 in this order). For maturity is projected the same for those

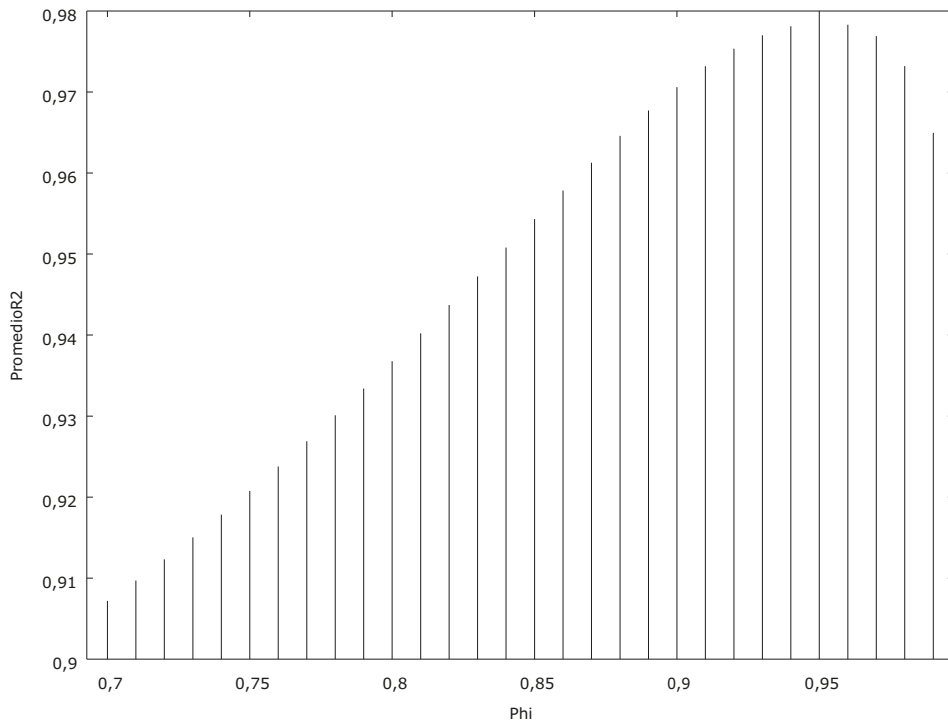


Figure 2. Standard error vs Phi

Own development source

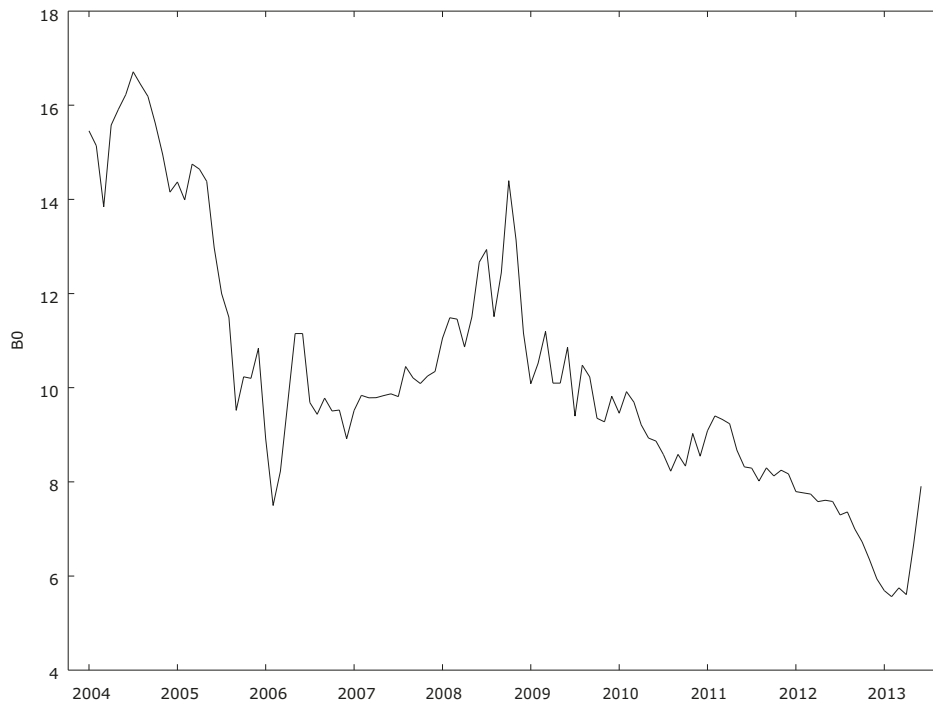


Figure 3. level of the model

Own development source

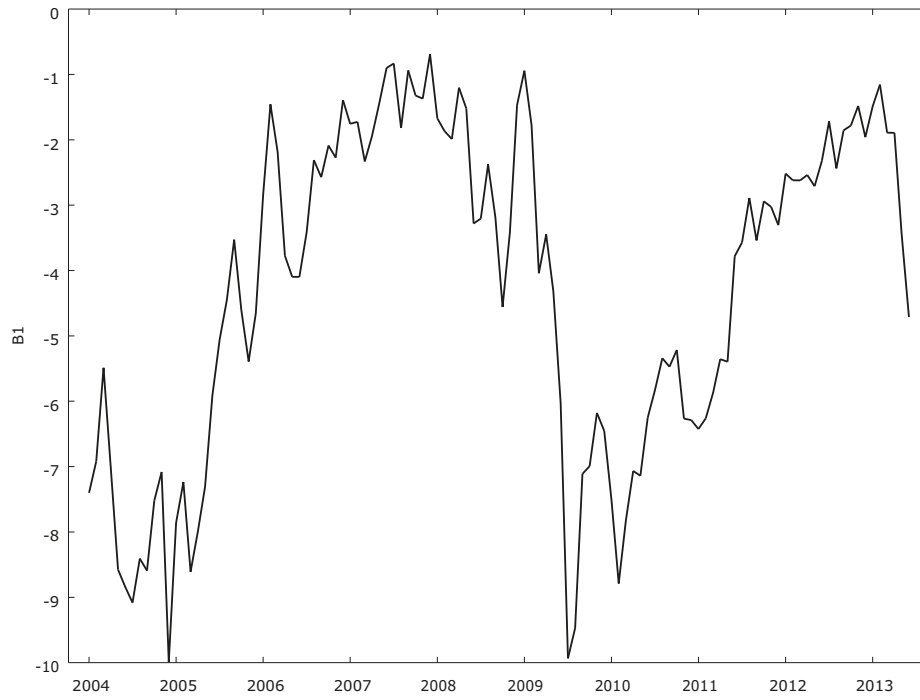


Figure 4. Slope of the Model

Own development source

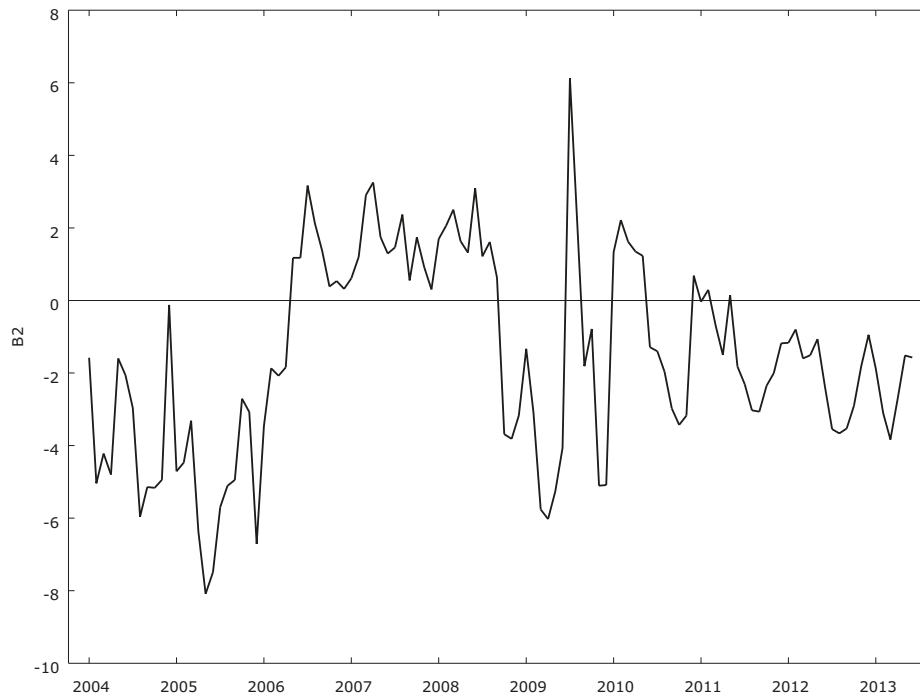


Figure 5. Curvature of the Model

Own development source

periods and they are compared to real rated, in order to observe how relevant the adjustment is to the model. Figures 6, 7, and 8 evidence the model change to the dynamic of future rate quotes.

Discrete rates, inflation expectations and economic activity Structures

In this section, it basically analyzes the interaction between the dynamic factors of the rate structure, previously obtained, and the inflation expectations with the economic activity. This analysis is tackled through stimations type $VAT(p)$.

From an essential macro-economic context – due to the variables which interact with the fee structure, Diebold, Rudebusch & Aruoba (2006), study the relationships between the level and the inflation and also with the product gap slope. Rudebusch & Wu (2004), study this among the level, the inflation expecta-

tions and the monetary politics rate structure. From this perspective, to this study case, figure 9 and 10 show the level and inflation expectations behavior to December each year, and between the slope and the Monthly Index of Economic Activity (MIEA).

On Table 2, are displayed the details of the used series between January 2004 and June 2013. For balance analysis purposes, based on the Phillips-Perron test the curve (β_2) represents an unit root only, while in the others, with the same test, show a higher p-value than 0,10 giving a hint of the unit root presence. (Annex N1), These ones at the moment of being differentiated show a null p-value, so for prediction purposes they could be treated $I(1)$. However, considering that what is sought to observe is the relationship structure, the reasons argue below, the variables will be modeled in the VAR in its natural state.

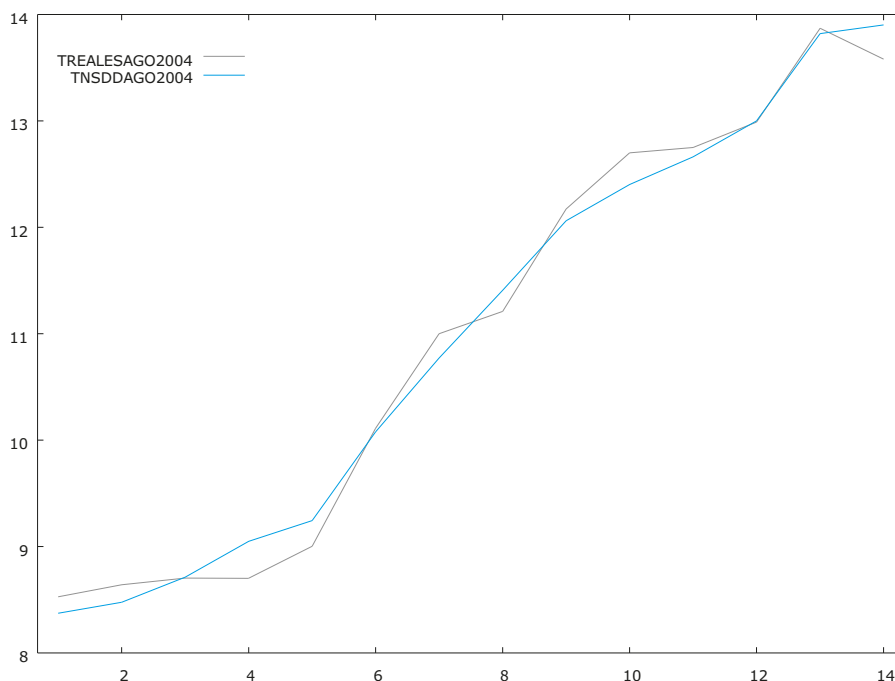


Figure 6. Modeled performance and Actual maturities curve from August 2004

Own development source

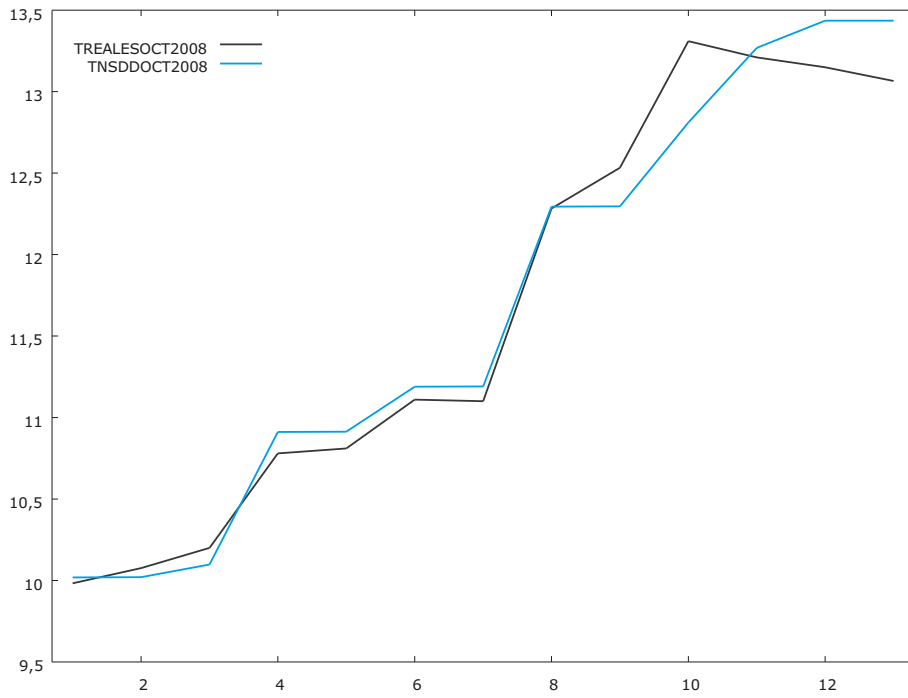


Figure 7. Modeled performance and Actual maturities curve from October 2008

Own development source

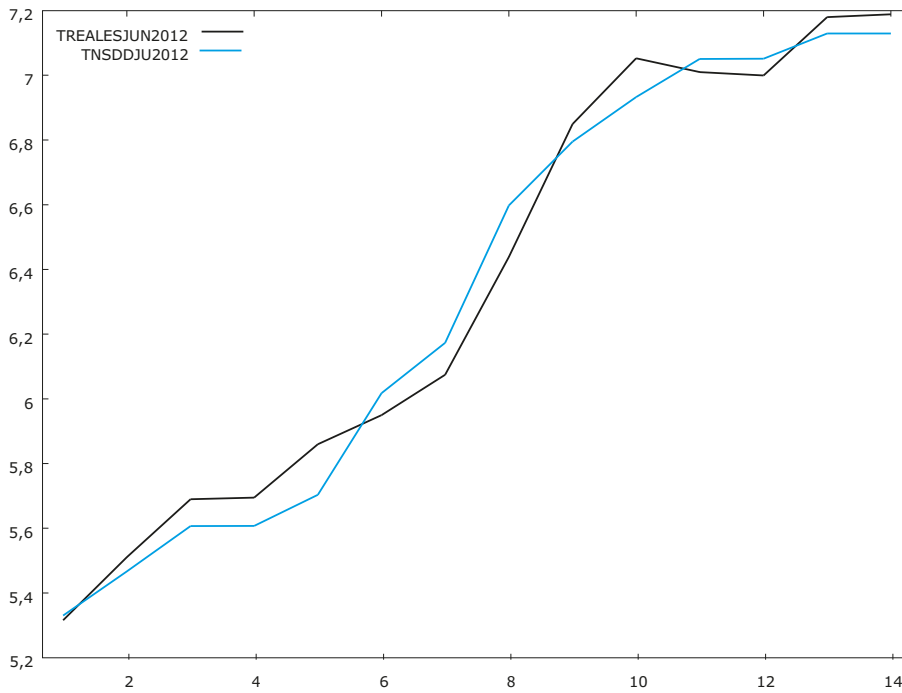


Figure 8. Modeled performance and Actual maturities curve from June 2012

Owndevelopmentsource

Table 2.
Used Series

Series	Description	Source
B0	Performance Curve level	Self produced
B1	Performance curve slope	Self produced
EXPINFDIC	Inflation expectations to December	Banco de la República de Colombia
IMACO(MIEA)	Monthly Index of Economic Activity	Banco de la República de Colombia

Source: Self-production

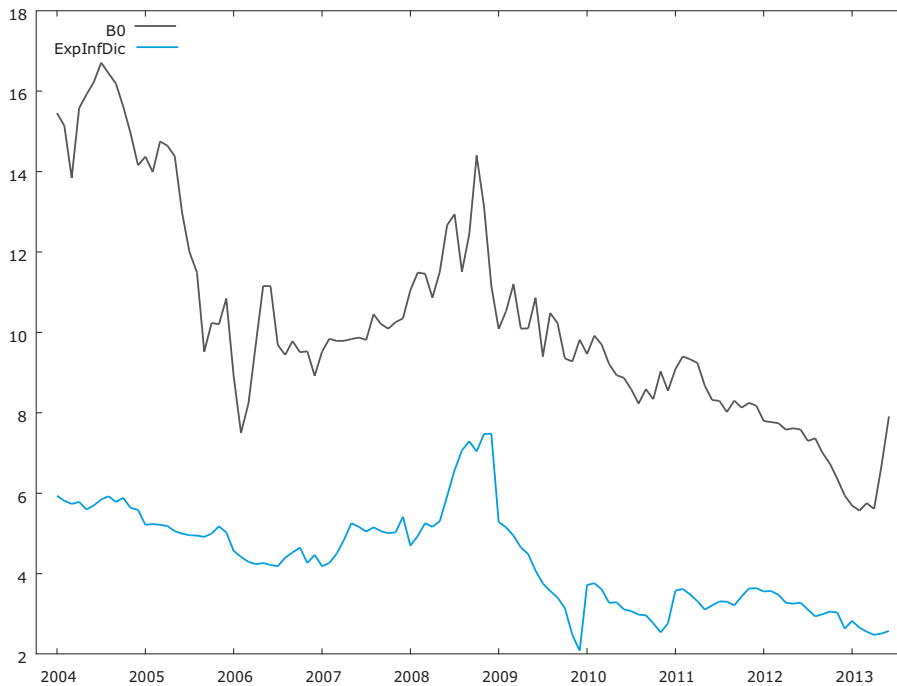


Figure 9. Level Versus Inflation expectations to December

Own development source

Estimated vector auto regression

Considering that in the literature on the modeling of classic or pure VAR, all variables depend on each other, therefore all are modeled endogenously also considering that students of the time series interpret that VAR methodologies proponents suggest that it is not necessary to differentiate, subtract trends or seasonally adjusted series, because the primary objective is to discover the relationships

between variables rather than precise estimates of parameters⁹; the series were modeled on their natural levels of production.

In keeping with the above, it is proposed a VAR(*p*) of the form:

$$X_t = C + \sum_{i=1}^p \theta_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

⁹ See for example Montenegro (2011) and Perez (2006)

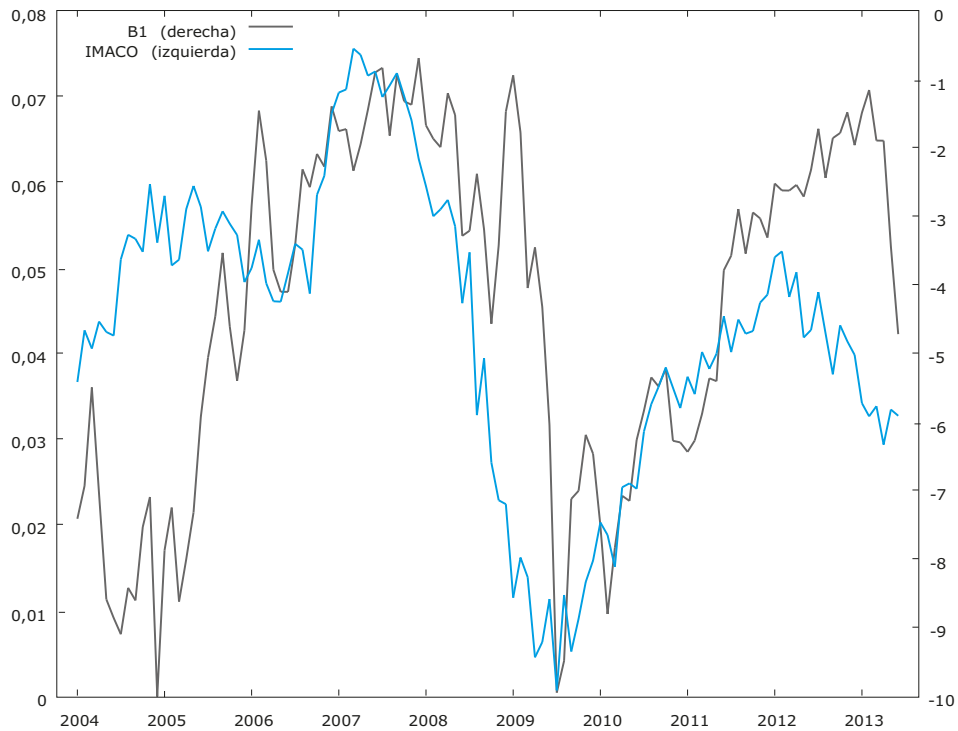


Figure 10. Slope Versus IMACO (MIEA)

Own development source

Where $X_t' = [\beta_{0t}, \beta_{1t}, EXPINF DIC_t, IMACO_t]$ and it is assumed that the error vector is independent and identically distributed. The VAR order according to the Bayesian de Schwarz criteria¹⁰ it could be estimated as a lag, (Table 3). Whereby the vector will be overwritten like this:

$$X_t' = [\beta_{0t-1}, \beta_{1t-1}, \beta_{2t-1}, EXPINF DIC_{t-1}, IMACO_{t-1}]$$

The results of the previous VAR modeling are shown in Table 4, where it is evident that both long-term rates and expectations of economic activity, have

an exogenous behavior model, where only depend significantly on themselves. Meanwhile, the curvature and inflation expectations are quite endogenous, in the sense that is statistically significantly explained by the model.

The slope, which in terms of Alfaro (2009), can be interpreted as a term premium, and somehow observed rates medium term, are statistically determined by the context of the expectations and negatively by the long-term rates. At the same time inflation expectations to December each year, are influenced by the rates of both long and medium-term.

Annex No 2, the figure of inverse roots, give the report of the model stability, because the points are within the unit circle.

¹⁰ The fact that it tends to this criterion to model the VAR lags are due only to the need not to over parameterize the model.

Table 3.
Lag Selection Criteria

Lags	Log(L)	P (RV)	AIC	BIC	HQC
1	164,36626		-2,673449	-2,176758*	-2,472059
2	190,53412	0,00001	-2,863595	-1,969551	-2,501093*
3	204,21914	0,03963	-2,818873	-1,527476	-2,295259
4	221,34788	0,00502	-2,839776	-1,151026	-2,155049
5	234,41482	0,05217	9,237174	-0,699358	-1,939621
6	255,63692	0,00034	-2,882165*	-0,39871	-1,875214

Own development source.

Table 4.
Auto Regressive Vector

Variable	B0	B1	EXPINF DIC	IMACO
B0(-1)	0.897182	-0.273412	0.121515	0.000515
	(0.08076)	(0.10618)	(0.03600)	(0.00054)
	[11.1090]	[-2.57505]	[3.37548]	[0.96130]
B1(-1)	-0.036208	0.761408	0.062338	-0.000185
	(0.05523)	(0.07261)	(0.02462)	(0.00037)
	[-0.65557]	[10.4860]	[2.53211]	[-0.50636]
EXPINF DIC(-1)	0.141125	0.300277	0.741852	-0.001397
	(0.13235)	(0.17400)	(0.05899)	(0.00088)
	[1.06630]	[1.72572]	[12.5749]	[-1.59184]
IMACO(-1)	4.754401	12.76913	2.620144	0.997424
	(4.38456)	(5.76440)	(1.95441)	(0.02907)
	[1.08435]	[2.21517]	[1.34063]	[34.3132]

Source: Own development

VAR Identification: (Impulse Response Functions)

Since the identification in a VAR model is done by random perturbations orthogonalization transforming the model so that the resulting variance covariance matrix would be a diagonal (Perez, 2006), with this order of the variables is paramount for the identification of shocks, Getting to sort the series of high to low exogenous relative, But identification of shocks by pulse technically

widespread orthogonalization does not require shocks or series order regarding their exogenous.

It is evident how disturbances curve level, upwardly, permanent affect, and almost immediately both to the deviations of inflation expectations as to the economic activity. At the same time slope shocks occur after three periods and in a negatively way, with not too much impact on deviations of both expectations (See Figure 11).

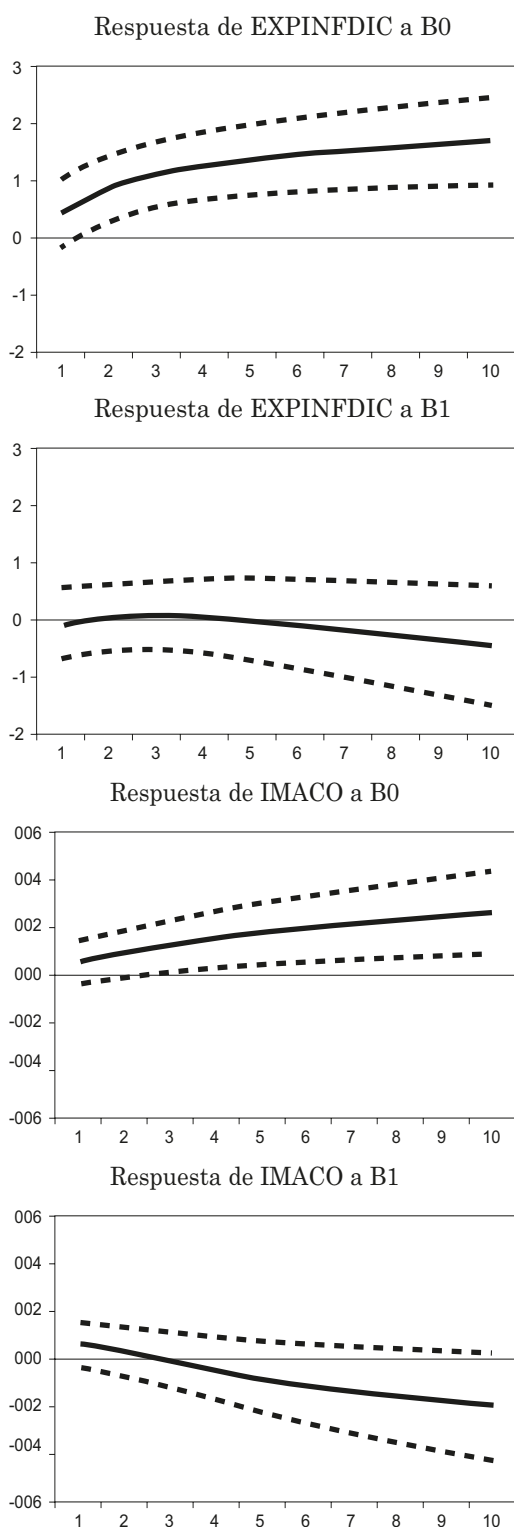


Figure 11. Expectations Response vs the Deviations from interest rates

Own development source

CONCLUSIONS

In this paper, the structure was estimated by exploiting the properties of time series, in a discrete context (monthly) from class B Treasury Bonds, showing that in Colombia exists in the public debt market, sufficient liquidity to adjust these curves under this discrete stage.

In the scenario of the typical related models or factors one, the results of setting the rate structure are similar to those obtained by Diebold & Li (2006). To limit the parameter that imposes nonlinearity [ϕ in this work and λ for Diebold & Li (2006)] to a fixed value to calibrate the model linearly by ordinary least squares, the results are very similar.

Likewise, the estimated maturities for three periods of the sample allow observing that the model fits reasonably well to the real dynamics of fees.

The auto-regression vector scenario allows inferring that inflation expectations are explained by factors yield curves, where long-term rates are heavier than short ones.

Regarding the impact of the factors disturbances of the yield curve, it is evident that they have immediate, ascending and sustained effects on deviations of the inflation expectations. Meanwhile the slope shocks manifest after three periods, negatively with no major impact on the deviations of both expectations

REFERENCES

- Alfaro, R. (2009). *La Curva de Rendimiento bajo Nelson Siegel*. Retrieved from: <http://www.bcentral.cl/estudios/documentos-trabajo/pdf/dtbc531.pdf>

- Alfaro, R. (2011). Affine Nelson–Siegel Model. *Economics Letters*, 110(1), 1–3. doi: 10.1016/j.econlet.2010.10.003
- Alfaro, R., Becerra, S. & Sagner, A. (2011). Estimacion de la estructura de tasas nominales de Chile: aplicacion del modelo dinamico Nelson-Siegel. *Economía Chilena*, 14(3), 57–74.
- Cámara, A., Henao, A. & Mendez, E. (2005). Movimientos de la Curva de Rendimientos de TES Tasa Fija en Colombia. *Innovar*, 15(26), 122–133.
- Christensen, J. H. E., Diebold, F. X., & Rudebusch, G. D. (2010). *The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models*. Recuperado de: <http://www.frbsf.org/economic-research/files/wp07-20bk.pdf>
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 385-408. doi: 10.2307/1911242
- Diebold, F. X. & Li, C. (2006). Forecasting the Term Tructure of Government Bond Yields. *Journal of Econometrics*, 130(2), 337–364. doi: 10.1016/j.jeconom.2005.03.005
- Diebold, F. X., Rudebusch, G. D., & Aruoba, S. B. (2006). The Macroeconomy and the Yield Curve: a Dynamic Latent Factor Approach. *Journal of Econometrics*, 131(1-2), 309–338. doi: 10.1016/j.jeconom.2005.01.011
- Dumrauf, G. L. (2015). *Análisis cuantitativo de bonos*. Argentina: Alfaomega. Recuperadp de: http://libroweb.alfaomega.com.mx/catalogo/analisis_cuantitativo_bonos/libreacceso
- Marin, J. & Rubio, G. (2011). *La Estructura Temporal de los Tipos de Interes en un Contexto de Ausencia de arbitraje*. Retrieved from: [https://books.google.com.co/books?id=tmZXGX40fZsC&pg=PA61&lpg=PA61&dq=La](https://books.google.com.co/books?id=tmZXGX40fZsC&pg=PA61&lpg=PA61&dq=La+Estructura+Temporal+de+los+Tipos+de+Interes+en+un+Contexto+de+Ausencia+de+arbitraje&source=bl&ots=pdePkjDef7&sig=6Y6HaLoLR_8exquQEtv3CSH3k2g&hl=es-419&sa=X&ei=apKVVZznLMaXNpXxrvAF&ved=0CBwQ6AEwAA#v=onepage&q=La%20Estructura%20Temporal%20de%20los%20Tipos%20de%20Interes%20en%20un%20Contexto%20de%20Ausencia%20de%20arbitraje&f=false)
- +Estructura+Temporal+de+los+Tipos+de+Interes+en+un+Contexto+de+Ausencia+de+arbitraje&source=bl&ots=pdePkjDef7&sig=6Y6HaLoLR_8exquQEtv3CSH3k2g&hl=es-419&sa=X&ei=apKVVZznLMaXNpXxrvAF&ved=0CBwQ6AEwAA#v=onepage&q=La%20Estructura%20Temporal%20de%20los%20Tipos%20de%20Interes%20en%20un%20Contexto%20de%20Ausencia%20de%20arbitraje&f=false
- Mascareñas, J. (2013). La Estructura Temporal de los Tipos de Interés. Retrieved from: <http://pendientedemigracion.ucm.es/info/jmas/mon/07.pdf>
- Melo, L. & Castro, G. (2010). Relacion Entre Variables Macro y la Curva de Rendimientos. *Borradores de Economía*, 605, 2-28. Retrieved from: <http://www.banrep.gov.co/sites/default/files/publicaciones/pdfs/borra605.pdf>
- Montenegro, A. (2011). *Modelos Estacionarios Multivariados*. Bogota: Editorial Universidad Nacional.
- Nelson, C. R. & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business*, 60(4), 473-489.
- Perez, C. (2006). *Econometria de las Series Temporales*. Barcelona, España: P. P. Hall, Ed
- Reveiz, A. & Leon, C. (2008). Indice representativo del mercado de deuda publica interna: INXTES. *Borradores de Economía*, 488, 1– 26. Retrieved from: <http://www.banrep.gov.co/document/ftp/borra488.pdf>
- Rojas, J. C. (2007). *La curva de rendimientos como predictor de expectativas macroeconómicas*. Bogota: Serie Documentos Borradores de Investigación Universidad del Rosario, (93), 1 – 14.

- Romero, P. A. & Robles, M. D. F. (2003). Estructura temporal de los tipos de interes: teoria y evidencia empirica, *Revista Asturiana de Economía*, 27, 7–47.
- Rudebusch, G. D. & Wu, T. (2004). *A Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy and the Economy*. Retrieved from: <http://www.frbsf.org/economic-research/files/wp03-17bk.pdf>
- Santana, J. (2008). La Curva de Rendimientos: una Revision Metodologica y nuevas Aproximaciones de Estimacion. *Cuadernos de Economía*, 27(48), 73–113.
- Svensson, L. O. (1995). Estimating and Interpreting Forward Interest Rates Sweden 1992-1994. *Sveriges Riksbank Quarterly Review*, 3, 13-26. doi: 10.3386/w4871
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177–188. doi:10.1016/0304-405X(77)90016-2

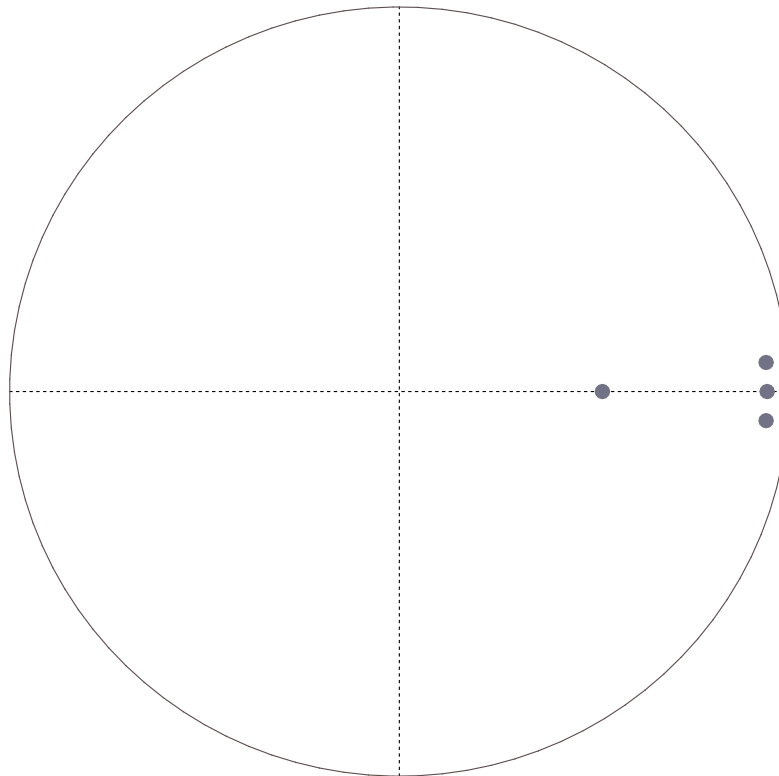
ANNEXES

Annex 1. Unit Root Test

Series	ADF		Phillips-Perron		KPSS(1% = 0,739 - 5% = 0,463 - 10% = 0,347%)
	t-statistic	p-value	t-statistic	p-value	t-statistic
B0	-2,004833	0,2845	-1,9441	0,3112	0,873712
B1	-2,470911	0,1253	-2,23038	0,1968	0,215215
B2	-4,059242	0,0017	-4,065934	0,0016	0,230685
EXPINF DIC	-1,463342	0,5486	-1,612206	0,4731	0,792083
IMACO	-2,83494	0,0568	-1,557657	0,5009	0,367047

Own development source.

raíces inversas del VAR en relación al círculo unidad



Annex 2.
Inverted Roots Graphic of VAR

